MATRIISILASKENTA MS-A0001
TUNTITEHTÄVÄT VIIKKO 3 (MA-KE)

Ohje: Tee tehtäviä rauhassa, kaikkia ei ole tarve saada ratkaistua kahdessa tunnissa. Tehtäviä ei tarvitse tehdä järjestyksessä, ja ei välttämättä kannatakaan, sillä myöhemmät tehtävät kattavat eri aiheita.

Harjoitus 1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} y - z = 2, \\ 2x + z = 3, \\ 2x + 2y - z = 7. \end{cases}$$

Gaussin eliminaatiolla. Laita rivioperaatiot näkyviin.

Harjoitus 2. Selvitä, mitkä alla olevista joukoista ovat aliavaruuksia $\mathbb{R}^3$:ssa.

(a) $V_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$
(b) $V_2 = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$
(c) $V_3 = \{(x, y, z) : x = 2y \text{ ja } z = x - y\}$
(d) $V_4 = \{(x, y, z) : x \geq 0\}$

Jos tarkastelemasi joukko ei ole aliavaruus, perustele tarkkaan miksi.

Harjoitus 3. Etsi edellisessä tehtävässä löytämillesi aliavaruuksille kannat.

Harjoitus 4. Erään lineaarisen yhtälöryhmän $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ ratkaisujoukko on suora avaruudessa $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) : x - 2z = 2, x + y = 1\}.$$

(a) Etsi vektori, joka virittää tämän suoran.
(b) Minkä kokoinen matriisi A voi olla kyseessä?
(c) Etsi matriisin A ydin $\ker A$.

Harjoitus 5. Tutkitaan lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ x + 3y + a^2 z = b \end{cases}$$

jossa reaaliset parametrit a, b ovat kiinnitettyjä. Tee Gaussin eliminaatio ja selvitä, milloin yhtälöryhmällä on
(i) yksikäsitteinen ratkaisu
(ii) äärettömän monta ratkaisua
(iii) ei ratkaisua
Tapauksessa (ii), kirjoita ratkaisujoukko auki.

Harjoitus 6. Lineaarikuvaukselle $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ pätee

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Etsi kuvauksen A matriisi (vinkki: esitä ensin standardikantavektorit kahden annetun vektorin avulla).

(b) Laske $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

(c) Mikä on A:n kuva-avaruus? Onko A surjektio?

Harjoitus 7. Todista (ilman käänteismatriisia), että jos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N$ on jono lineaarisesti riippumattomia vektoreita ja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus, jolle $\ker A = \{0\}$, niin myös vektorit

$$A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_N$$

ovat lineaarisesti riippumattomia.

Harjoitus 8. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 4 & 3\\1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

(a) Sovella Gaussin eliminaatiota, ja selvitä $\ker A$ (eli ratkaise yhtälö $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$).

(b) Etsi kanta kuva-avaruudelle $\operatorname{Im} A$ ja selvitä matriisin A aste.

(c) Etsi ehto vektorille $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}^T$, joka on yhtäpitävä yhtälöryhmän $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ ratkeavuuden kanssa.

Harjoitus 9. ⬠ Todista, että jos $V \subset \mathbb{R}^n$ on aliavaruus ja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus, niin myös kuvajoukko

$$A(V) = \{A\mathbf{v} : \mathbf{v} \in V\}$$

on aliavaruus $\mathbb{R}^m$:ssä. Osoita lisäksi, että jos $\ker A = \{\mathbf{0}\}$, niin aliavaruuksien V ja $A(V)$ dimensio on sama.

Huom! Tähtimerkintä ⬠ tarkoittaa teoreettisempaa tehtävää, joka voi olla paljonkin haastavampi, mutta syventää materiaalin teoreettista ymmärrystä.