KONVEKSIT FUNKTIOT

Tehtävä 1. Selvitä, ovatko seuraavat funktiot konvekseja tai konkaaveja:

(1) $x^2 - 4x + 1$
(2) $x^3 + x^2$
(3) $1/x$ (kun $x > 0$)
(4) $|x|^3$
(5) e^x
(6) $\log(x)$ (kun $x > 0$)

Tehtävä 2. Osoita, että seuraava Youngin epäyhtälö pätee kaikille positiivisille luvuille a, b ja p, q, missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Vihje: Käytä logaritmifunktiota.

Tehtävä 3. Osoita, että konvekseille funktioille pätee epäyhtälö

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Tarkista tämä myös käsin funktiolle $f(x) = x^2$.

Tehtävä 4. Funktiolle $f(x)$ pätee $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, ja $f(3) = 8$. Päättele, että f ei voi olla konveksi funktio.

Tehtävä 5. Olkoon $y > x$. Muistetaan, että konveksit funktiot toteuttavat epäyhtälön

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Sijoita yhtälöön sopiva λ, ja totea että myös seuraava epäyhtälö pätee:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

missä $0 \leq h \leq y - x$ on mielivaltainen parametri. Ottamalla raja-arvo kun $h \to 0$, huomataan myös, että

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Tulkitse tämä vielä geometrisesti.

Tehtävä 6. Todista edellisen tehtävän menetelmällä myös, että

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y).$$

Päättele, että konveksin funktion derivaatta on kasvava funktio.

Tehtävä 7. Olkoon f ja g konvekseja yhden muuttujan funktioita. Osoita, että kahden muuttujan funktio

$$h(x, y) = f(x) + g(y)$$

on myös konveksi.