

MATRIISILASKENTA MS-A0001
TUNTITEHTÄVÄT VIIKKO 1 (TO-PE)

Ohje: Tee tehtäviä rauhassa, kaikkia ei ole tarve saada ratkaistua kahdessa tunnissa. Tehtäviä ei tarvitse tehdä järjestyksessä, ja ei välttämättä kannatakaan, sillä myöhemmät tehtävät kattavat eri aiheita.

Harjoitus 1. Olkoon

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Laske vektorit $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ja $-3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$.
- b) Piirrä vektorit $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ samaan koordinaatistoon.
- c) Määritä luvut $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Harjoitus 2. Olkoon

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Laske vektoreiden $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ pituudet.
- b) Laske pistetulot $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ja $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
- c) Ovatko vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ kohtisuorassa? Perustele.
- d) Määritä vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{w}$ välinen kulma.

Harjoitus 3. Tarkastellaan avaruuden vektoreita

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Laske $\|\mathbf{a}\|$ ja $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
- b) Ovatko $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ kohtisuorassa?
- c) Määritä luku $t \in \mathbb{R}$ siten, että vektori $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ on kohtisuorassa vektoria $\mathbf{c}$ vastaan.

Harjoitus 4. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Ilmoita matriisien A ja B koot.
- b) Laske $A + B$ ja $2A - B$.
- c) Määritä matriisi X , jolle
$$X + A = 3B.$$
- d) Voidaanko tulo AB laskea? Entä BA ? Perustele matriisien kokojen avulla.

Harjoitus 5. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Laske matriisit AB ja BA . Mitkä ovat niiden koot?
 b) Olkoon

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Laske ensin $B\mathbf{x}$ ja sitten $A(B\mathbf{x})$.
 c) Laske $(AB)\mathbf{x}$. Mitä huomaat?

Harjoitus 6. Tarkastellaan tason lineaarikuvauksia $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ja $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, joiden matriisit ovat

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Laske molempien kuvausten vaikutus kantavektoreihin

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Piirrä yksikköneliö, jonka kärjet ovat $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ja $(0,1)$. Piirrä myös sen kuva kuvauksessa A .
 c) Piirrä vastaavasti yksikköneliön kuva kuvauksessa B .
 d) Selitä sanallisesti, miten kuvaukset A ja B muuttavat tason pisteitä.

Harjoitus 7. Tarkastellaan kahta tason geometrasta kuvausta:

- A kiertää tasoa 90° myötäpäivään (negatiiviseen suuntaan) origon ympäri.
 - B peilaa tason x -akselin suhteen.
- a) Muodosta kuvauksia A ja B vastaavat matriisit.
 b) Laske kuvaukset A ja B vektorille

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Laske yhdistettyjen kuvausten $B \circ A$ ja $A \circ B$ matriisit.
 d) Piirrä vektorin $\mathbf{v}$ kuvat molemmissa yhdistetyissä kuvauksissa. Onko kuvausten suoritusjärjestyksellä merkitystä?

Harjoitus 8. Tutkitaan luentomonisteessa esiteltyä yleistä rotaatiomatriisia tasossa:

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- a) Laske matriisi A_θ^2 . Millaista geometrasta muunnosta tämä matriisi kuvaa?
 b) Päätele tuloksesta kaksinkertaisen sinin ja kosinin kaavat.

Harjoitus 9. ☆ Osoita luentomonisteessa väitetty tulos: Jokainen lineaarikuvaus $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ voidaan esittää $m \times n$ -matriisina.

Harjoitus 10. ☆ Olkoon $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus, joka säilyttää jokaisen vektorin pituuden samana, siis

$$|A\mathbf{v}| = |\mathbf{v}| \quad \text{kaikilla } \mathbf{v}.$$

Osoita, että matriisi A säilyttää myös kaikkien vektorien väliset kulmat.

Huom! Tähtimerkintä ☆ tarkoittaa teoreettisempaa tehtävää, joka voi olla paljonkin haastavampi, mutta syventää materiaalin teoreettista ymmärrystä.