

MATRIISILASKENTA MS-A0001
TUNTITEHTÄVÄT VIIKKO 2 (MA-KE)

Ohje: Tee tehtäviä rauhassa, kaikkia ei ole tarve saada ratkaistua kahdessa tunnissa. Tehtäviä ei tarvitse tehdä järjestyksessä, ja ei välttämättä kannatakaan, sillä myöhemmät tehtävät kattavat eri aiheita.

Harjoitus 1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Laske AB ja BA . Ovatko ne samat? Laske myös A^2 ja A^3 . Keksitkö yleisen kaavan A^n :lle?

Harjoitus 2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tarkista, että $(AB)^T = B^T A^T$.

Harjoitus 3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Laske A^2 ja A^3 .
- (b) Olkoon I 3×3 -identiteettimatriisi. Kirjoita auki $(I+A)^3$ käyttäen matriisien laskusääntöjä ja edellistä kohtaa. Selvitä se sitten.
- (c) Koita keksiä yleinen kaava matriisille $(I+A)^n$.

Harjoitus 4. Olkoon A ja B kompleksisia matriiseja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Laske A^2 ja B^2 . Muista, että $i^2 = -1$.

Harjoitus 5. Olkoon $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y + x \end{pmatrix}.$$

- (a) Mikä on kuvauksen M esitys matriisina?
- (b) Minne yksikköneliö kuvautuu kuvauksessa M ? Yksikköneliön kärjet ovat $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Harjoitus 6. Tietokonegrafikassa on eräs niksi, jolla myös affiinit kuvaukset

$$\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v} + \mathbf{b}$$

voidaan esittää lineaarikuvauksen kautta. Tutkitaan tason vektoreille $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ määriteltyä affinia kuvausta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

jonka avulla jokaista tason vektoria $\mathbf{v}$ vastaa kolmiulotteinen vektori $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{pmatrix}$. Jos A ja $\mathbf{b}$ on annettu, keksi 3×3 -matriisi M , jolle

$$M \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{v} + \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Harjoitus 7. ☆ Todista matriisin transpoosin ominaisuus:

$$(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (A^T \mathbf{w}),$$

missä $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$.

Huom! Tähtimerkintä ☆ tarkoittaa teoreettisempaa tehtävää, joka voi olla paljonkin haastavampi, mutta syventää materiaalin teoreettista ymmärrystä.