MATRIISILASKENTA MS-A0001
TAULUTEHTÄVÄT VIIKKO 3 (TO-PE)

Ohje: Tee tehtäviä kotona ennen harjoituksia. Harjoitustilaisuudessa voit merkitä tehtävät tehdyksi, jolloin saat niistä pisteitä. Tällöin saatat päästä myös esittämään ratkaisusi taululle.

Harjoitus 1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 1. \end{cases}$$

Gaussin eliminaatiolla. Laita rivioperaatiot näkyviin.

Harjoitus 2. Tutkitaan kompleksista matriisia ja vektoria

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 0 & 2 \\ 1 & 1-i & i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2-i \\ 3+2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

(a) Ratkaise yhtälöryhmä $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ Gaussin eliminaatiolla.
(b) Tarkista ratkaisusi laskemalla $A\mathbf{v}$ suoraan.
(c) Mikä on tämän matriisin ydin $\ker A$?

Ohje: Muista, että $i^2 = -1$ ja $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$.

Harjoitus 3. Olkoon

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Etsi B^{-1}, ja ratkaise sillä yhtälöryhmä $B\mathbf{v} = \mathbf{c}$.

Harjoitus 4. Olkoon a reaalinen parametri ja M_a matriisi

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

etsi kaikki luvut a, joilla M_a on kääntyvä. Laske myös M_3^{-1}.

Ylimääräisiä tehtäviä

Pohdi seuraavia tehtäviä, jos tekeminen loppuu kesken. Nämä eivät tule arvosteluun.

Harjoitus 5. Tutkitaan seuraavia vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

olkoon vielä $U = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$.

(a) Etsi $\dim U$ ja etsi jokin U:n kanta vektoreista $\mathbf{u}_i$.
(b) Esitä loput vektoreista $\mathbf{u}_i$ valitsemasi kannan avulla lineaarikombinaationa kantavektoreista.
(c) Kuuluuko vektori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T$ aliavaruuteen U? Jos näin, kirjoita se valitsemasi kannan avulla.

Harjoitus 6. Eräällä lineaarisella yhtälöryhmällä $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ on olemassa ratkaisu täsmälleen silloin, kun vektori $\mathbf{b}$ kuuluu joukkoon:

$$V = \{(x, y, z) : 2x + y - z = 0\}.$$

(a) Mikä on tällöin matriisin A kuva-avaruus $\operatorname{Im} A$? Etsi sille kanta.
(b) Etsi jokin 3×3-matriisi A, joka voisi olla tässä kyseessä.