MATRIISILASKENTA MS-A0001
TUNTITEHTÄVÄT VIIKKO 4 (MA-KE)

Ohje: Tee tehtäviä rauhassa, kaikkia ei ole tarve saada ratkaistua kahdessa tunnissa. Tehtäviä ei tarvitse tehdä järjestyksessä, ja ei välttämättä kannatakaan, sillä myöhemmät tehtävät kattavat eri aiheita.

Harjoitus 1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Etsi A^{-1}. Tarkista vastaus laskemalla tulot AA^{-1} ja $A^{-1}A$.

Harjoitus 2. Todista, että jokaisella neliömatriisilla on korkeintaan yksi käänteismatriisi.

Harjoitus 3. Olkoon

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Selvitä pistetulolla, mitkä vektoreista ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden.

Harjoitus 4. Käytä Gram-Schmidtiä, ja ortogonalisoi vektorijono

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Harjoitus 5. Olkoon

$$Q = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Millä parametrien a ja b arvoilla Q on ortogonaalinen? Etsi tällöin $\det Q$.

Harjoitus 6. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Etsi pienimmän neliösumman ratkaisu yhtälöryhmälle $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ ratkaisemalla normaaliyhtälö. Laske myös jäännös

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{v}$$

ja tarkista, että $A^T\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Harjoitus 7. ⬠ Kolmannen asteen polynomia voi ajatella neliulotteisena vektorina seuraavasti:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \to \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Tämän polynomin derivaatta muuttujan x suhteen on toisen asteen polynomi $p'(x)$. Etsi 3×4-matriisi, joka esittää lineaarista muunnosta $p \mapsto p'$. Voiko integraalifunktiolle muodostaa samanlaisen muunnoksen?

Harjoitus 8. ⬠ Olkoon $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ ja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ lineaarisesti riippumattomia vektoripareja avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

(1) Osoita, että löytyy ortogonaalinen matriisi $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ jolle

$$Q\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \qquad Q\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$$

täsmälleen silloin, kun

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j \qquad \text{for all } i, j \in \{1, 2\}.$$

(2) Sovella tätä vektoreihin

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ja

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Etsi matriisi Q eksplisiittisesti.

(3) Pohdi, onko tällainen matriisi Q aina yksikäsitteinen.

Huom! Tähtimerkintä ⬠ tarkoittaa teoreettisempaa tehtävää, joka voi olla paljonkin haastavampi, mutta syventää materiaalin teoreettista ymmärrystä.