MATRIISILASKENTA MS-A0001
TAULUTEHTÄVÄT VIIKKO 4 (TO-PE)

Ohje: Tee tehtäviä kotona ennen harjoituksia. Harjoitustilaisuudessa voit merkitä tehtävät tehdyksi, jolloin saat niistä pisteitä. Tällöin saatat päästä myös esittämään ratkaisusi taululle.

Harjoitus 1. Olkoon

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tarkista, että Q on ortogonaalinen. Etsi Q^{-1} ja näytä, että $|Q\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|$ kaikilla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Harjoitus 2. Etsi pienimmän neliösumman menetelmällä suora $y = kx+c$, joka sovitetaan pistejoukkoon

$$(0,1), \quad (1,2), \quad (2,2), \quad (3,4).$$

Kirjoita pienimmän neliösumman menetelmä matriisimuodossa $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, ja selvitä kyseinen matriisi A ja vektori $\mathbf{b}$. Etsi normaaliyhtälön kautta parhaat kertoimet k, c.

Harjoitus 3. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

(a) Laske $\det(A_t)$ ja määritä kaikki t:n arvot, joilla A_t on kääntyvä.
(b) Etsi matriisin A_t aste myös niillä t:n arvoilla, joilla A_t ei ole kääntyvä.

Harjoitus 4. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Laske matriisin A determinantti Gaussin eliminaatiolla.
(b) Laske determinantti myös kofaktorikehitelmällä ensimmäisen rivin suhteen.
(c) Onko A kääntyvä? Perustele vastauksesi.

Ylimääräisiä tehtäviä

Pohdi seuraavia tehtäviä, jos tekeminen loppuu kesken. Nämä eivät tule arvosteluun.

Harjoitus 5. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriisi, jolle

$$A^2 - 5A + 6I = 0.$$

(1) Osoita, että A on kääntyvä, ja esitä A^{-1} matriisin A avulla.
(2) Osoita, että kaikilla $k \geq 1$ pätee,

$$A^k = (3^k - 2^k)A + (3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k)I.$$

Harjoitus 6. Olkoon

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Määritä matriisin A_t ominaisarvot parametrin t funktioina.
(b) Määritä ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit.
(c) Millä parametrin t arvoilla matriisi A_t ei ole kääntyvä?
(d) Milloin matriisilla A_t on kaksi erisuurta ominaisarvoa?