MATRIISILASKENTA MS-A0001
TUNTITEHTÄVÄT VIIKKO 5 (MA-KE)

Ohje: Tee tehtäviä rauhassa, kaikkia ei ole tarve saada ratkaistua kahdessa tunnissa. Tehtäviä ei tarvitse tehdä järjestyksessä, ja ei välttämättä kannatakaan, sillä myöhemmät tehtävät kattavat eri aiheita.

Harjoitus 1. Tarkastellaan parametrin $t \in \mathbb{R}$ määräämää matriisia

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2 & t-1 \end{pmatrix}.$$

(a) Laske $\det(A_t)$.
(b) Määritä kaikki parametrin t arvot, joilla A_t on kääntyvä.
(c) Ratkaise yhtälöryhmä

$$A_t \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tapauksissa $t = 0$ ja $t = 2$.

Harjoitus 2. Olkoon $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ kääntyviä matriiseja, joille

$$\det(A) = -2, \qquad \det(B) = 3.$$

Laske seuraavat determinantit:
(a) $\det(2A)$.
(b) $\det(A^T)$.
(c) $\det(A^{-1})$.
(d) $\det(A^T B^{-1} A)$.

Harjoitus 3. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Määritä matriisin A ominaisarvot.
(b) Etsi jokaista ominaisarvoa vastaava ominaisvektori.
(c) Tarkista, että laskemasi ominaisvektorit ovat varmasti ominaisvektoreita vertaamalla yhtälöön $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Harjoitus 4. Tarkastellaan kahden suureen kehitystä kuvaavaa lineaarista mallia

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Määritä matriisin A ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisavaruudet.
(b) Osoita, että jos alkuarvo $\mathbf{x}_0$ kuuluu jompaankumpaan ominaisavaruuteen, myös $\mathbf{x}_k$ kuuluu samaan avaruuteen kaikilla k.
(c) Oletetaan, että

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Laske $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2$ ja päättele yleinen kaava vektorille $\mathbf{x}_k$.

Harjoitus 5. Kolmen mittauspisteen arvoja kuvaava vektori on

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Tarkastellaan muunnosta, jonka matriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Määritä matriisin A ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisavaruudet.
(b) Osoita suoraan, että vektori

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on ominaisvektori, ja määritä sitä vastaava ominaisarvo.
(c) Kuvaile geometrisesti ominaisavaruutta, joka vastaa jotakin muuta ominaisarvoa kuin kohdassa (b) saamaasi ominaisarvoa. Miten lineaarikuvaus A käyttäytyy tällaisessa ominaisavaruudessa?

Harjoitus 6. Tarkastellaan parametrin $t \in \mathbb{R}$ määräämää matriisia

$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Määritä matriisin A_t ominaisarvot kaikilla $t \in \mathbb{R}$.
(b) Ratkaise ominaisvektoriyhtälö

$$A_t\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$$

ja määritä ominaisavaruus tapauksissa $t = 0$ ja $t \neq 0$.
(c) Millä parametrin t arvoilla vektori

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on matriisin A_t ominaisvektori?
(d) Selitä, miksi sama ominaisarvo ei välttämättä tarkoita, että ominaisavaruus olisi kaikilla parametrin arvoilla samanlainen.

Harjoitus 7. ☆ Osoita, että eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit muodostavat aina lineaarisesti riippumattoman vektorijonon.

Huom! Tähtimerkintä ☆ tarkoittaa teoreettisempaa tehtävää, joka voi olla paljonkin haastavampi, mutta syventää materiaalin teoreettista ymmärrystä.