MATRIISILASKENTA MS-A0001
TAULUTEHTÄVÄT VIIKKO 5 (TO-PE)

Ohje: Tee tehtäviä kotona ennen harjoituksia. Harjoitustilaisuudessa voit merkitä tehtävät tehdyksi, jolloin saat niistä pisteitä. Tällöin saatat päästä myös esittämään ratkaisusi taululle.

Harjoitus 1. Olkoon

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{ja} \qquad P_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}.$$

Olkoon $A = P_t D P_t^{-1}$.
(a) Mitkä ovat A:n ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit?
(b) Millä t:n arvoilla P_t on ortogonaalinen?
(c) Onko edellisen kohdan tapauksessa A symmetrinen?

Harjoitus 2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Määritä ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit.
(b) Muodosta ortonormaali kanta ominaisvektoreista.
(c) Esitä matriisi muodossa

$$A = QDQ^T,$$

missä Q on ortogonaalinen ja D diagonaalinen.

Harjoitus 3. Olkoon

$$q(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2.$$

Etsi neliömuotoa q vastaava matriisi A, eli esitä se muodossa

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x},$$

missä A on symmetrinen matriisi. Selvitä neliömuodon definiittiys.

Harjoitus 4. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matriisieksponentti e^{tA} määritellään sarjalla

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

(a) Laske A^2 ja A^3.
(b) Laske e^{tA} sarjan määritelmän avulla.
(c) Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Ylimääräisiä tehtäviä

Pohdi seuraavia tehtäviä, jos tekeminen loppuu kesken. Nämä eivät tule arvosteluun.

Harjoitus 5. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit.
(b) Vertaa ominaisarvojen algebrallista ja geometrista kertalukua. Osoita, ettei A ole diagonalisoituva.

Harjoitus 6. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja tarkastellaan neliömuotoa

$$q_t(x, y) = x^2 + 2txy + y^2.$$

(a) Muodosta neliömuotoa vastaava symmetrinen matriisi A_t.
(b) Määritä matriisin A_t ominaisarvot.
(c) Määritä kaikki parametrin t arvot, joilla neliömuoto on positiivisesti definiitti.
(d) Milloin neliömuoto on positiivisesti semidefiniitti?
(e) Milloin neliömuoto on indefiniitti?