MATRIISILASKENTA MS-A0001
TUNTITEHTÄVÄT VIIKKO 6 (MA-KE)

Ohje: Tee tehtäviä rauhassa, kaikkia ei ole tarve saada ratkaistua kahdessa tunnissa. Tehtäviä ei tarvitse tehdä järjestyksessä, ja ei välttämättä kannatakaan, sillä myöhemmät tehtävät kattavat eri aiheita.

Harjoitus 1. Olkoon matriisi A symmetrinen. Todista diagonalisoimalla matriisi A, että myös A^{-1} on symmetrinen.

Harjoitus 2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Osoita, että matrisiin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippuvia toisistaan, ja etsi matriisin A ydin $\ker A$.

Harjoitus 3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Määritä kaikki luvut b, joilla $A = QDQ^T$, missä Q on ortogonaalinen ja D diagonaalinen.
(b) Määritä kaikki luvut b, joilla matriisi A ei ole diagonalisoituva.

Harjoitus 4. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ratkaise yhtälöryhmä $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, ja laske $\det(AA^T)$.

Harjoitus 5. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Muodosta matriisi A^TA, ja etsi matriisin A käänteismatriisi Gauss-Jordanin menetelmällä.

Harjoitus 6. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriisilla A ei ole reaalisia ominaisarvoja. Etsi matriisin A kompleksinen diagonalisaatio $A = PDP^{-1}$, missä P ja D ovat kompleksisia matriiseja (P kääntyvä, D diagonaalinen).

Harjoitus 7. Erään reaalisen ja symmetrisen matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 4$. Tiedetään, että ominaisarvoa λ_1 vastaava ominaisvektori on

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Selvitä matriisi A.

Harjoitus 8. ☆ Olkoon A diagonalisoituva matriisi. Olkoon B matriisi, joka **kommutoi** matriisin A kanssa, eli $AB = BA$. Todista, että B toimii ns. invariantisti A:n ominaisavaruuksissa, eli

$$B(V_\lambda) \subset V_\lambda,$$

missä $V_\lambda = \{\mathbf{v} : A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$ ja $B(V_\lambda) = \{B\mathbf{v} : \mathbf{v} \in V_\lambda\}$.

Olkoon lisäksi $\dim V_\lambda = 1$ jokaisella ominaisarvolla λ. Osoita, että matriisit A ja B voidaan diagonalisoida samalla kannanvaihdolla, eli löytyy kääntyvä matriisi P, jolle

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{ja} \qquad B = PGP^{-1},$$

missä D ja G ovat diagonaalisia.

Huom! Tähtimerkintä ☆ tarkoittaa teoreettisempaa tehtävää, joka voi olla paljonkin haastavampi, mutta syventää materiaalin teoreettista ymmärrystä.