MATRIISILASKENTA MS-A0001
TAULUTEHTÄVÄT VIIKKO 6 (TO-PE)

Ohje: Tee tehtäviä kotona ennen harjoituksia. Harjoitustilaisuudessa voit merkitä tehtävät tehdyksi, jolloin saat niistä pisteitä. Tällöin saatat päästä myös esittämään ratkaisusi taululle.

Harjoitus 1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2+b & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Määritä parametrin b arvot, joilla A on diagonalisoituva.

Harjoitus 2. Olkoon A diagonalisoituva matriisi. Osoita diagonalisaatiota käyttäen, että e^A on kääntyvä, ja e^{-A} on sen käänteismatriisi. (Et siis saa laskea $e^A e^{-A} = e^{A-A} = I$, vaan tarkoitus on todistaa tämä kaava.)

Harjoitus 3. Etsi LU-hajotelma matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Harjoitus 4. Kahden palvelun käyttäjät siirtyvät palvelusta toiseen viikoittain. Käyttäjien osuuksia kuvaava vektori on

$$\mathbf{p}_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix},$$

missä $a_k + b_k = 1$. Siirtymämalli on

$$\mathbf{p}_{k+1} = P\mathbf{p}_k, \qquad P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

(a) Määritä matriisin P ominaisarvot ja ominaisavaruudet.
(b) Etsi vakaa käyttäjäjakauma eli vektori $\mathbf{p}$, jonka komponenttien summa on 1 ja

$$P\mathbf{p} = \mathbf{p}.$$

(c) Selitä ominaisarvon 0.5 merkitys mallissa. Miten sen ominaisvektori vaikuttaa käyttäjäosuuksien kehitykseen?

Ylimääräisiä tehtäviä

Pohdi seuraavia tehtäviä, jos tekeminen loppuu kesken. Nämä eivät tule arvosteluun.

Harjoitus 5. Matriisia A kutsutaan **normaaliksi**, jos $A^TA = AA^T$.
(a) Osoita, että jokainen ortogonaalinen matriisi on myös normaali.
(b) Millä parametrien arvoilla matriisi

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix}$$

on normaali?

Harjoitus 6. Diagonalisoi matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$