

MATRIISILASKENTA MS-A0001
TUNTITEHTÄVÄT VIIKKO 1 (TO-PE)

Harjoitus 1. $\mathbb{R}^2$. Vektorien summausta, vektorit 2D koordinaatistossa, vektorit yhtälössä.

Harjoitus 2. $\mathbb{R}^2$. Vektorien pituus, kohtisuoruus, pistetulo, vektorien välinen kulma.

Harjoitus 3. $\mathbb{R}^3$. Vektorien pituus ja kohtisuoruus.

Harjoitus 4. Matriisien välinen summa ja kertolasku. Matriisit yhtälössä.

Harjoitus 5. Matriisi-matriisitulo, matriisi-vektoritulo.

Harjoitus 6. 2D lineaarikuvaukset. Lineaarikuvaus 2×2 matriisina.

Harjoitus 7. 2D lineaarikuvaukset. Lineaarikuvausten muodostaminen, lineaarikuvausten yhdiste ja matriisien välinen tulo.

Harjoitus 8. 2D lineaarikuvaukset. Lineaarikuvaus 2×2 matriisina.

Harjoitus 9.* Lineaarikuvaukset matriiseina ($m \times n$).

Harjoitus 10.* $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaukset ja vektorien pituus ja välinen kulma.

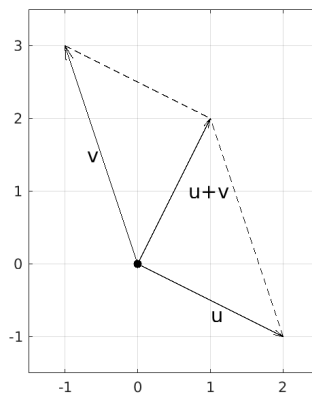
Malliratkaisuja?

Harjoitus 1.

(a)

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad 2\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(b)



(c) Lasketaan ensin $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$.

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2a - b \\ -a + 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä esim. kertomalla alempi yhtälö kahdella ja summaamalla yhtälöt toisiinsa:

$$\begin{cases} 2a - b = 4 \\ -a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b = 4 \\ -2a + 6b = 0 \end{cases} \Rightarrow 5b = 4 \Rightarrow \underline{b = 4/5, a = 12/5}.$$

Harjoitus 2.

(a)

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{5}, \quad |\mathbf{w}| = \sqrt{10}.$$

(b)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5.$$

(c) Ovat, sillä niiden välinen pistetulo on 0. Tämä on seurausta siitä, että

$$\cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = 0 \implies \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pi/2.$$

(d) Lasketaan ylläolevalla kaavalla:

$$\cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{u}||\mathbf{w}|} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \angle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \pi/4.$$

Harjoitus 3.

(a)

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0.$$

(b) Ovat kohtisuorassa, koska pistetulo on nolla.

a

(c) Ratkaistaan yhtälö $(\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$:

$$\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 + 2t \\ -2 + t \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 1 + 2t - 2 + t + 2 = 3t + 1 = 0 \implies \underline{t = -\frac{1}{3}}.$$

Harjoitus 4.

(a) A on 2×3 matriisi, B on 2×3 matriisi.

(b)

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad 2A - B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

- (c) Matriisiyhtälössä jokaisen alkion täytyy toteuttaa yhtälö. Voidaan ratkaista esim. vähentämällä matriisi A puolittain.

$$X = 3B - A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -3 \\ -3 & 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (d) Matriisitulo määritellään matriiseille, joista vasemmanpuoleisen matriisin sarakkeiden määrä on yhtä suuri kuin oikeanpuoleisen matriisin rivien määrä, eli matriiseille joiden koot ovat muotoa $m \times k$, $k \times n$. Tämä ei pidä paikkaansa matriiseille A ja B kumminkaan päin, koska $3 \neq 2$.

Harjoitus 5.

- (a)

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Koot 2×2 ja 3×3 .

- (b)

$$B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A(B\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

- (c)

$$(AB)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix},$$

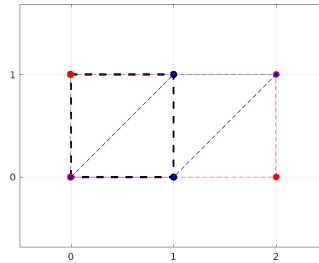
vaikuttaa siltä, että $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$.

Harjoitus 6.

- (a)

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (b,c) Alkuperäinen neliö mustalla, A :n vaikutus punaisella, B :n vaikutus sinisellä.



- (d) Matriisi A kaksinkertaistaa pisteet x -koordinaatin suuntaan, mutta pitää y -koordinaatin ennallaan. Kuvaus B pitää y -koordinaatin myös ennallaan, mutta siirtää x -koordinaattia y -koordinaatin verran.

Harjoitus 7.

- (a) Aiemmasta tehtävästä opittiin, että matriisit voi päätellä niiden käyttäytymisestä kantavektoreita kohtaan. Mietitään mitä kuvaus A tekee yksikkövektoreille $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$:

- $\mathbf{e}_1$ käännettynä 90 astetta myötäpäivään on $[0, -1]^\top$.
- $\mathbf{e}_2$ käännettynä 90 astetta myötäpäivään on $[1, 0]^\top = \mathbf{e}_1$.

Siispä

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kuvaus B taas

- $\mathbf{e}_1$ peilattuna x -akselin suhteen on edelleen $\mathbf{e}_1$.
- $\mathbf{e}_2$ peilattuna x -akselin suhteen kääntyy kokonaan ympäri, eli on $[0, -1]^\top$.

Siten

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Lasketaan:

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad B\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- (c)

$$B \circ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A \circ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Voitaisiin myös päätellä sanallisen kuvauksen perusteella mitä kantavektoreille tapahtuu ja laskea siitä.

- (d) Koska $(A \circ B) \neq (B \circ A)$, kuvausten järjestyksellä on eroa. $(A \circ B)\mathbf{v} = [-1, -2]^\top$ mutta $(B \circ A)\mathbf{v} = [1, 2]^\top$.

Harjoitus 8.

- (a)

$$A_\theta^2 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

- (b) Koska kahdesti pyöräyttäminen on sama asia kuin pyöräyttäminen kaksinkertaisen kulman verran, pätee $A_\theta^2 = A_{2\theta}$. Tästä saadaan (a)-kohdan avulla

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix},$$

eli

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta.$$

Harjoitus 9.* Väite: jokainen lineaarikuvaus $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ voidaan esittää $m \times n$ -matriisinä.

Todistus. Koska $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ muodostaa kannan $\mathbb{R}^n$:lle, voidaan mikä tahansa vektori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$:ssä ilmaista muodossa

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i.$$

Koska kuvaus F on lineaarinen, pätee

$$F(\mathbf{v}) = F\left(\sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n F(v_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n v_i F(\mathbf{e}_i),$$

eli vektori $F(\mathbf{v})$ riippuu vain siitä, mitä arvoja F antaa kantavektoreille $\mathbf{e}_i$. Jokainen $F(\mathbf{e}_i)$ on jokin $\mathbb{R}^m$:n vektori, ja voidaan siksi kirjoittaa muodossa $F(\mathbf{e}_i) = [A_{1i}, \dots, A_{mi}]^\top$ joillekin skalaareille $A_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Sijoittamalla nämä vektorit aiempaan lausekkeeseen saadaan

$$F(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n v_i F(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n v_i \begin{bmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \mathbf{v},$$

eli lineaarikuvaus olikin oikeastaan matriisivektoritulo.

Harjoitus 10.* Olkoon $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus joka säilyttää vektorin pituuden samana. Silloin A säilyttää myös vektorien väliset kulmat.

Todistus. Otetaan vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$. Päte $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$, jolloin myös

$$\begin{aligned} |A(\mathbf{u} + \mathbf{v})|^2 &= |A\mathbf{u}|^2 + 2(A\mathbf{u}) \cdot (A\mathbf{v}) + |A\mathbf{v}|^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2(A\mathbf{u}) \cdot (A\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2. \end{aligned}$$

Yhdistämällä $|(A\mathbf{u} + A\mathbf{v})|^2 = |A(\mathbf{u} + \mathbf{v})|^2$ saadaan

$$|\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2(A\mathbf{u}) \cdot (A\mathbf{v}) \implies \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (A\mathbf{u}) \cdot (A\mathbf{v}).$$