MATRIISILASKENTA MS-A0001

KOTITEHTÄVÄT 1 – MALLIT

Kotitehtävä 1.

(a) Lasketaan!

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 & -1+2 \\ -2+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 4+0 \\ 3-1 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

(b) Ei vaikuta olevan, esim. koska $(AB)_{11} = 8 \neq 3 = (BA)_{11}$.

(c) Lasketaan ensin

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2-1 \\ -1+3 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

ja sitten sen neliö

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 + 1\cdot 2 & 3\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 2 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan nyt $A^2 + 2AB + B^2$. Ensin A^2 ja B^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix},$$

ja siten

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} -1+16+1 & 2+2-3 \\ -1-4+9 & -2+2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Toisaalta

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{bmatrix} -1+8+3+1 & 2+1+4-3 \\ -1-2+2+9 & -2+1+6-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Binomikaavassa $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ käytetään hyväksi skalaaritulon kommutatiivisuutta, eli $ab+ba = 2ab$. Koska $AB \neq BA$, ei tätä voi hyödyntää suoraan matriiseille. Huom! Jos pätee $AB = BA$, voidaan binomikaavoja käyttää.

Kotitehtävä 2. Voidaan todistaa mekaanisesti avaamalla lausekkeet. Huom! Koska A on neliömatriisi, $A + A^\top$ ja $A^\top A$ on määritelty.

$$(A + A^\top)_{ij} = A_{ij} + A^\top_{ij} = A_{ij} + A_{ji} = A_{ji} + A_{ij} = A_{ji} + A^\top_{ji} = (A + A^\top)_{ji}.$$

$$(A^\top A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A^\top_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} A_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A^\top_{jk} A_{ki} = (A^\top A)_{ji}.$$