MATRIISILASKENTA MS-A0001

TUNTITEHTÄVÄT VIIKKO 2 (MA-KE)

Harjoitus 1. Matriisi-matriisi tulo, neliömatriisin potenssit.

Harjoitus 2. Transpoosi matriisitulossa.

Harjoitus 3. Neliömatriisien potenssit, binomikaava kommutoiville matriiseille.

Harjoitus 4. Kompleksiset matriisit.

Harjoitus 5. Lineaarikuvaus matriisina.

Harjoitus 6. Affiinit kuvaukset matriiseina.

Harjoitus 7.* Transpoosi pistetulossa.

Malliratkaisuja

Harjoitus 1.

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 2 & -4 \end{bmatrix},\ BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 8 \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Koska $A^2 = I$ ja $IA = A$, saadaan

$$A^n = \begin{cases} (A^2)^k = I & \text{kun } n = 2k \\ (A^2)^k A = A & \text{kun } n = 2k+1, \end{cases}$$

eli $A^n = I$ kun n on parillinen ja $A^n = A$ kun n on pariton.

Harjoitus 2.

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 19 \end{bmatrix},\ B^\top A^\top = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 19 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 3.

(a)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A^3 = \mathbf{0}_{3\times 3}.$$

(b)

$$\begin{aligned} (I+A)^3 &= (I+A)(I+A)(I+A) = (I^2 + IA + AI + A^2)(I+A) = (I + 2A + A^2)(I+A) \\ &= I + 2A + A^2 + A + 2A^2 + A^3 = I + 3A + 3A^2 + A^3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Koska $IA = AI$, voidaan käyttää binomikaavaa:

$$(I+A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k.$$

Koska $A^k = \mathbf{0}_{3\times 3}$ kun $k \geq 3$, tämä pelkistyy muotoon

$$(I+A)^n = I + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{3n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 4.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1+i^2 & i+i \\ i+i & i^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}, \; B^2 = \begin{bmatrix} 1-i^2 & i+i \\ -i-i & -i^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 5.

(a) Voidaan käytännössä lukea suoraan annetusta yhtälöstä:

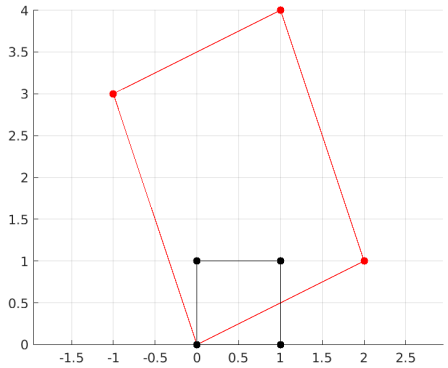
$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}x + M_{12}y \\ M_{21}x + M_{22}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{bmatrix},$$

eli

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Lasketaan:

$$M \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$



Harjoitus 6. Lasketaan auki ja katsotaan mitä tapahtuu.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}x + M_{12}y + M_{13} \\ M_{21}x + M_{22}y + M_{23} \\ M_{31}x + M_{32}y + M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x + A_{12}y + b_1 \\ A_{21}x + A_{22}y + b_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jotta alin rivi olisi riippumaton x:stä ja y:stä, tulee asettaa $M_{31} = M_{32} = 0$, jolloin $M_{33} = 1$. Kahta ensimmäistä riviä vertailemalla huomataan $M_{i1} = A_{i1}$, ja $M_{i3} = b_i$ kun $i \in \{1, 2\}$. Siispä

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 7.* Todista $(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (A^\top \mathbf{w})$.

Todistus. Olkoon $R_1, \ldots, R_m$ matriisin A rivit ja $S_1, \ldots, S_n$ sen sarakkeet (eli $A^\top$:n rivit).

$$(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} R_1 \cdot \mathbf{v} \\ \vdots \\ R_m \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{mj} v_j \end{bmatrix} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} v_j w_i.$$

Toisaalta taas

$$\mathbf{v} \cdot (A^\top \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \cdot \mathbf{w} \\ \cdots \\ S_n \cdot \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{v} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m A_{i1} w_i \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^m A_{in} w_i \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{ij} v_j w_i,$$

eli $(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (A^\top \mathbf{w})$.