MATRIISILASKENTA MS-A0001

KOTITEHTÄVÄT VIIKKO 2

Malliratkaisuja

Harjoitus 1.

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right),\ W = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\right)$$

Tapa 1. Voidaan verrata esim. koittamalla muodostaa W:n virittäviä vektoreita V:n virittävillä vektoreilla. Katsotaan:

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\-2\alpha+\beta\\\beta\end{bmatrix}$$

josta valitsemalla $\alpha = 1, \beta = 1$ saadaan $(1,-1,1)^\top$ ja $\alpha = 2, \beta = 3$ saadaan $(2,-1,3)^\top$. Kumpikin W:n virittävistä vektoreista siis kuuluu V:hen, joten $W \subset V$. Koska kummankin avaruuden dimensio on kaksi, ovat ne siis yhtäsuuret. Vaihtoehtoisesti voitaisiin osoittaa, että V:n kantavektorit voidaan esittää W:n kantavektorien avulla.

Tapa 2. Laitetaan virittävät vektorit matriisiin ja koitetaan sieventää matriisia sarakeoperaatioilla, niin voidaan vertailla suoraan.

$$A = \begin{bmatrix}1&0\\-2&1\\0&1\end{bmatrix} \overset{\substack{+\quad\cdot 2\\ \downarrow\ \ \ \urcorner}}{=} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\\1&3\end{bmatrix} \overset{\substack{\cdot(-2)\quad +\\ \ulcorner\ \ \ \downarrow}}{=} \begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\1&1\end{bmatrix} \overset{\substack{+\\ \downarrow\ \ \urcorner}}{=} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{bmatrix}$$

Koska matriisit ovat yhtäsuuret, ovat niiden sarakkeiden virittämät avaruudet yhtäsuuret.

Harjoitus 2.

(a) Aloitetaan kirjoittamalla yhtälö matriisimuodossa.

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\3&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\\lambda\end{bmatrix}.$$

Gaussataan...

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\2&-1&1&1\\3&0&2&\lambda\end{array}\right] \overset{\substack{\cdot(-2)\quad \cdot(-3)\\ \llcorner\ +\ \ \ \ \llcorner\ +}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-3&-1&-3\\0&-3&-1&\lambda-6\end{array}\right] \overset{\cdot(-1)}{\underset{+}{\llcorner}} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-3&-1&-3\\0&0&0&\lambda-3\end{array}\right]$$

Alin rivi vastaa nyt yhtälöä $x\cdot 0 + y\cdot 0 + z\cdot 0 = \lambda - 3$. Toisin sanottuna, jotta yhtälöllä olisi ratkaisuja, on oltava $\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = 3$.

Ratkaistaan nyt yhtälöryhmä loppuun. Koska alin rivi on nollarivi, on meillä käytännössä kaksi yhtälöä ja kolme muuttujaa, eli yksi muuttuja tulee jäämään vapaaksi muuttujaksi.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}\!\!\!\!\!\!\begin{array}{l} + \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

eli $x = -1 + 2y$ ja $z = 3 - y$. Toisin sanottuna vektorit, jotka ovat muotoa

$$\begin{bmatrix} -1 + 2\alpha \\ \alpha \\ 3 - \alpha \end{bmatrix},$$

toteuttavat yhtälön.