MATRIISILASKENTA MS-A0001

TUNTITEHTÄVÄT VIIKKO 2 (TO-PE)

Malliratkaisuja

Harjoitus 1. Koska $\mathbf{w} = -2\mathbf{u}$, muodostavat ne saman suoran. Mikä tahansa aliavaruuden V vektori voidaan esittää muodossa

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} - 2\gamma\mathbf{u} = \overset{\in\mathbb{R}}{(\alpha - 2\gamma)}\,\mathbf{u} + \beta\mathbf{v},$$

eli $\operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Koska kaksi vektoria riittää virittämään aliavaruutemme, on aliavaruutemme taso $\mathbb{R}^3$:ssa.

Harjoitus 2.

(a) Vektoriavaruus V sisältää vektorit

$$\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - \beta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tämä on $\mathbb{R}^4$ osajoukko, mutta ei koko $\mathbb{R}^4$, koska esim. vektori $(0, 0, 0, 1)^\top$ puuttuu. Se on vektoriavaruus, koska

- Jos $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in V$, niin $\lambda\mathbf{u} = (\lambda\alpha)\mathbf{v} + (\lambda\beta)\mathbf{w} \in V$.
- Jos $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in V$ ja $\mathbf{b} = \gamma\mathbf{v} + \delta\mathbf{w} \in V$, niin $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha + \gamma)\mathbf{v} + (\beta + \delta)\mathbf{w} \in V$.

(b) (a)-kohdan avulla voidaan päätellä, että jos vektori $\mathbf{b}$ kuuluu avaruuteen, on se muodostettava asettamalla $\alpha = 2$ ja $\beta = 3$. Kuitenkin

$$2\mathbf{v} + 3\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{b},$$

eli $\mathbf{b}$ ei kuulu aliavaruuteen.

Harjoitus 3.

(a) Pitää osoittaa, että W toteuttaa ehdot (i) $\mathbf{v} \in W \implies \lambda\mathbf{v} \in W$ ja (ii) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W \implies \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$.

(i) Jos (x, y, z) toteuttaa yhtälön $x - 2y + z = 0$, niin $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ toteuttaa myös

$$\lambda x - 2\lambda y + \lambda z = \lambda(x - 2y + z) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

(ii) Jos (a, b, c) ja (x, y, z) toteuttavat annetun yhtälön, niin myös vektorille $(a + x, b + y, c + z)$ pätee

$$(a + x) - 2(b + y) + (c + z) = (a - 2b + c) + (x - 2y + z) = 0 + 0 = 0.$$

Siispä W on vektoriavaruus. Koska se on $\mathbb{R}^3$:n osajoukko, on se $\mathbb{R}^3$:n aliavaruus.

(b) Etsitään kaksi erisuuntaista vektoria jotka toteuttavat yhtälön. Koska meillä on vain yksi ehto, voidaan vapaasti valita kaksi muuttujaa ja ratkaista kolmas. Asetetaan ensin $x = 1$ ja $y = 0$. Tällöin

$$x - 2y + z = 1 - 2 \cdot 0 + z = 0 \implies z = -1.$$

Asetetaan nyt $x = 0, y = 1$, jolloin $z = -x + 2y = 2$. Vektorit $(1, 0, -1)^\top$ ja $(0, 1, 2)^\top$ kuuluvat siis avaruuteen W. Koska W ei ole koko $\mathbb{R}^3$ (esim. $(1, 0, 0)^\top \notin W$), on sen oltava $\mathbb{R}^3$:n taso. Tällöin kaksi vektoria riittää virittämään W:n, ja

$$W = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Koska kaksi vektoria riittää määrittämään W:n, on sen dimensio kaksi.

Harjoitus 4.

(a) Ei ole.

(b) U:ssa ovat pisteet muotoa $(0, y, z)$ ja $(x, 0, z)$, eli ne joissa joko $x = 0$ tai $y = 0$. U on muodoltaan xz- ja yz-tasojen yhdistelmä. Voidaan konkreettisesti näyttää esim. valitsemalla vektorit $(1, 0, 0)^\top$ ja $(0, 1, 0)^\top$, joiden summa $(1, 1, 0)^\top$ ei toteuta yhtälöä.