MATRIISILASKENTA MS-A0001

ALKUVIIKON TEHTÄVÄT VIIKKO 3

Harjoitus 1. Gaussin eliminaatio ja yhtälönratkaisu.

Harjoitus 2. Vektoriavaruudet $\mathbb{R}^3$:ssa.

Harjoitus 3. Kantavektorit $\mathbb{R}^3$:ssa.

Harjoitus 4. Yhtälöryhmän ratkaisu aliavaruutena. Matriisin nolla-avaruus.

Harjoitus 5. Gaussin eliminaatio, yhtälöryhmän ratkaiseminen.

Harjoitus 6. Lineaarikuvauksen matriisi, kannanvaihto. Surjektio ja kuva-avaruus.

Harjoitus 7. Lineaarinen riippumattomuus ja lineaarikuvaukset.

Harjoitus 8. Yhtälöryhmät, nolla-avaruus, kuva-avaruus, Gaussin eliminaatio.

Harjoitus 9*. Aliavaruudet lineaarikuvauksissa.

Malliratkaisuja

Harjoitus 1. Huom! Rivinvaihto on sama asia, kuin listattaisiin yhtälöt eri järjestyksessä, eli ei vaikuta ratkaisuun mitenkään.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right] \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right] \overset{\cdot(-1)}{\underset{+}{\leftarrow}} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right] \overset{\cdot(-2)}{\underset{+}{\leftarrow}} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Koska yksi nollarivi, on meillä vain kaksi lineaarisesti riippumatonta ehtoa. Tällöin meille jää yksi vapaa muuttuja, olkoon vaikka z, ja ratkaisuja on siis äärettömän monta. Pari tapaa esittää kaikki ratkaisut:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z \\ y = 2 + z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{tai vektorit muotoa} \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha \\ 2 + \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 2. Helppo yleinen sääntö: jos on lineaaristen yhtälöiden $A\mathbf{x} = 0$ määrittelemiä (huom. ei yleisesti $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, koska silloin voi olla $\mathbf{0} \notin V_i$), ovat aliavaruuksia.

(a) V_1 on aliavaruus, koska on esim. matriisin $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ nolla-avaruus.

(b) V_2 ei ole vektoriavaruus, koska $0 + 0 + 0 \neq 1 \implies \mathbf{0} \notin V_2$.

(c) V_3 on aliavaruus, esim. matriisin $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ nolla-avaruus.

(d) V_4 ei ole aliavaruus, koska negatiivisella skalaarilla kertominen heittää meidät ulos avaruudesta: esim. $(1,0,0)^\top \in V_4$ mutta $(-1,0,0)^\top \notin V_4$.

Harjoitus 3. Kanta voidaan löytää esim. tutkimalla kaikkia ratkaisuja yhtälölle $A\mathbf{x} = 0$. Tehdään tämä V_1:lle ja V_2:lle.

(a) "Gaussataan" $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} \implies$ onkin jo porrasmuodossa, kaksi vapaata muuttujaa, vaikka y ja z. Vektorit muotoa

$$\begin{bmatrix}-\alpha-\beta\\ \alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

kuuluvat aliavaruuteen, eli kantavektorit vaikkapa $(-1,1,0)^\top$ ja $(-1,0,1)^\top$.

(b) Nyt joudutaan oikeasti Gaussaamaan:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{\longleftarrow_+}{} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

jää yksi vapaa muuttuja, valitaan vaikkapa y niin saadaan muotoon

$$\begin{cases}x = 2y\\ y\in\mathbb{R}\\ z=-y\end{cases} \quad \text{tai } \alpha\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},$$

eli kannan muodostaa vektori $(2,1,-1)^\top$.

Harjoitus 4.

(a) Halutaan löytää vektorit $(x,y,z)^\top$, jotka toteuttavat yhtälöryhmän. Kasataan ehdot matriisiin ja Gaussataan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right] \overset{\cdot(-1)}{\underset{\longleftarrow_+}{}} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right].$$

Yksi vapaa muuttuja, valitaan z, koska sarakkeet x ja y muodostavat jo identiteettimatriisin. Saadaan

$$\begin{cases}x = 2+2z\\ y=-1-2z\\ z\in\mathbb{R}\end{cases} \quad \text{tai vektorina } \alpha\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

Suora on siis vektorin $(2,-2,1)^\top$ suuntainen ja kulkee pisteen $(2,-1,0)^\top$ läpi.

(b) Koska ratkaisujoukko on kolmiulotteinen, on A:lla oltava kolme saraketta. Koska suoran määrittää kaksi ehtoa, on luonnollinen tapa valita matriisiksi sellainen, jolla on kaksi riviä, eli 2×3 -matriisi. Kuitenkin olisi mahdollista valita myös pitkulaisempi matriisi, kunhan lineaarisesti riippumattomia yhtälöitä on vain kaksi. Triviaali esimerkki tällaisesta olisi vaikka

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

missä matriisi A onkin kooltaan 4×3.

(c) Voidaan ratkaista aiemmin Gaussatusta matriisista, mutta nyt laitetaan $\mathbf{b}$:n paikalle nolla. Ratkaisut ovat muotoa

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \ker A = \operatorname{span} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Huom! Tämä ei ole sattumaa :) Yhtälöryhmän ratkaisut ovat aina muotoa "yksittäisratkaisu + nolla-avaruuden vektori".

Harjoitus 5. Gaussataan...

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 3 & a^2 & b \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a^2-1 & b-1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \end{matrix}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a+1 & b-3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 & b-3 \end{array}\right]$$

(i) Yksikäsitteinen ratkaisu löytyy silloin, kun matriisin alin rivi on erisuuri kuin nolla. Tämä käy silloin kun $a \neq 1$.

(ii) Äärettömän monta ratkaisua löytyy, kun alin rivi on kokonaan nollaa. Tällöin $a = 1$ ja $b = 3$, ja ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{cases} y = 1 - (a-1)z \\ x = 1 - z - y = 1 - z - (1 - (a-1)z) = (a-2)z \end{cases} \quad \text{tai } \alpha \begin{bmatrix} a-2 \\ a-1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Ratkaisuja ei ole ollenkaan silloin, kun matriisin alin rivi on nollaa, mutta vektorin yhtälön oikealla puolella ei ole nollaa. Tämä tapahtuu, kun $a = 1$ mutta $b \neq 3$.

Harjoitus 6. Nimetään $\mathbf{u} = (1,1)^\top$ ja $\mathbf{v} = (1,-1)^\top$.

(a) Käytetään vinkkiä!

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Muistetaan, että A:n ensimmäinen sarake saadaan laskemalla $A\mathbf{e}_1 = A(\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v})$ ja toinen $A\mathbf{e}_2 = A(\frac{1}{2}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v})$. Saadaan

$$A\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(A\mathbf{u} + A\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$A\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisi on siis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Vaihtoehtoisesti voidaan huomata että $(3,5)^\top = 4\mathbf{u} - 1\mathbf{v}$ ja laskea $4A\mathbf{u} - A\mathbf{v}$:

$$4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(c) Kuva-avaruus on joukko $A\mathbf{x}$, eli

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{+}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{+\,\cdot(-2)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \implies A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ -3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Tästä voidaan nähdä, että esimerkiksi vektoria $(1,1,0)^\top$ ei voida muodostaa, joten A ei ole surjektio.

Harjoitus 7. Se, että $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N$ ovat lineaarisesti riippumattomia tarkoittaa, että ainoat skalaarit $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ jotka toteuttavat

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_N\mathbf{v}_N = 0$$

ovat $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N$. Katsellaan nyt vektoreita $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_N$ ja olkoon $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ sellaiset, että

$$\alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_N A\mathbf{v}_n = 0.$$

Koska A on lineaarikuvaus, voidaan sieventää

$$\alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_N A\mathbf{v}_n = A(\alpha_1\mathbf{v}_1) + \cdots + A(\alpha_N\mathbf{v}_N) = A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_N\mathbf{v}_n) = 0,$$

eli toisin sanottuna vektori $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_N\mathbf{v}_n$ kuuluu A:n nolla-avaruuteen. Koska tehtävän oletuksessa oli, että A:n nolla-avaruus on triviaali (yhtä kuin nolla), on oltava

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_N\mathbf{v}_n = 0, \text{ eli on oltava } \alpha_1 = \cdots = \alpha_N = 0,$$

sillä $\mathbf{v}_i$ olivat lineaarisesti riippumattomat. Täten vektorit $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_N$ ovat myös lineaarisesti riippumattomat.

Harjoitus 8.

(a) Gaussataan...

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \overset{\cdot(-2)\,+}{\overset{\cdot(-1)\,+}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\cdot(-1)\,+}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nollarivi, eli saadaan epätriviaali nolla-avaruus. Lasketaan

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{eli } \ker A = \operatorname{span} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Etsitään kanta kuva-avaruudelle tekemällä sarakeoperaatioita:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \overset{\cdot(-1)\quad +}{\overset{\cdot(-2)\,+}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{+\quad \cdot(-2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ eli } \operatorname{Im} A = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

(c) $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ ratkeaa jos $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} A$. (b)-kohdassa saatiin kuva-avaruudelle muoto $(\alpha, \beta, \beta - \alpha)^\top$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, eli $\mathbf{b}$:lle ehto on $b_3 = b_2 - b_1$.

Harjoitus 9.* Todistetaan, että $A(V)$ on vektoriavaruus. Käydään läpi kaksi ehtoa:

(i) Olkoon $\mathbf{w} \in A(V)$, eli on olemassa $\mathbf{v} \in V$ siten että $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$. Koska V on vektoriavaruus, myös $\lambda\mathbf{v} \in V$, jolloin $A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{w} \in A(V)$.

(ii) Olkoon $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A(V)$, eli on olemassa $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ siten että $A\mathbf{u} = \mathbf{a}$ ja $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$. Myös $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$, joten $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \in A(V)$.

Näytetään seuraavaksi, että $A(V) = \operatorname{span}(A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_k)$, missä $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ ovat V:n kantavektorit. Huom! Tämä tarkoittaa, että $\dim V \geq \dim A(V)$.

Olkoon $\mathbf{w} \in A(V)$ ja $A\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Koska $\mathbf{v} \in V$, se voidaan esittää kantavektoreiden summana, eli $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{v}_i$ joillekin skalaareille $c_i \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\mathbf{w} = A\mathbf{v} = A(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1 A\mathbf{v}_1 + \ldots c_k A\mathbf{v}_k,$$

eli mikä tahansa $\mathbf{w}$ voidaan esittää vektoreiden $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_k$ avulla, jolloin ne virittävät avaruuden $A(V)$. Jos $\ker A = \{\mathbf{0}\}$, voidaan käyttää lisäksi Harjoituksen 7 tulosta: jos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ on kanta avaruudelle V (eli ovat lineaarisesti riippumattomia), niin silloin $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_k$ ovat myös lineaarisesti riippumattomia. Koska voidaan löytää avaruudesta $A(V)$ k kappaletta lineaarisesti riippumatonta vektoria, saadaan $\dim A(V) \geq k = \dim V$.

Koska $\dim A(V) \geq \dim V$ ja $\dim A(V) \leq \dim V$, pätee $\dim A(V) = \dim V$.