MATRIISILASKENTA MS-A0001

KOTITEHTÄVÄT VIIKKO 3 – Malliratkaisut

Harjoitus 1. Voidaan ratkaista selvittämällä käänteismatriisit A^{-1} ja B^{-1}, niin saadaan

$$AXB = C \iff X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Voidaan käyttää 2×2 käänteismatriisille kaavaa

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

jolloin saadaan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

josta laskemalla

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 2.

(a) Halutaan, että vektorien pistetulo on yhtä kuin nolla:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2a - 2 + 3 = 0 \implies a = -1/2.$$

(b) Voidaan laskea ristitulon avulla tai vaihtoehtoisesti ottamalla mikä tahansa $\mathbf{v}$:stä ja $\mathbf{w}$:stä riippumaton vektori, ja vähentämällä $\mathbf{v}$:n ja $\mathbf{w}$:n suuntaiset komponentit. Voitaisiin myös ratkaista yhtälöiden $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ ja $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$ avulla. Tehdään viimeksimainittu tässä: olkoon $\mathbf{u} = (x, y, z)$, jolloin

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1/2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

eli

$$\begin{cases} 2x = y - z \\ 7y = -13z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \frac{-13}{7}z - z \\ y = \frac{-13}{7}z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{20}{14}z = -\frac{10}{7}z \\ y = -\frac{13}{7}z \end{cases}.$$

Voidaan valita mikä tahansa $z \in \mathbb{R}$ ja saadaan kohtisuora vektori. Jotta saadaan sievä, valitaan vaikka $z = 7$, jolloin $\mathbf{u} = (-10, -13, 7)^\top$.