MATRIISILASKENTA MS-A0001

TAULUTEHTÄVÄT VIIKKO 3 – Malliratkaisut

Harjoitus 1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Gaussin eliminaatiolla. Laita rivioperaatiot näkyviin.

Vastaus. Kirjoitetaan yhtälöryhmä ensin muodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan nyt Gaussin eliminaatiolla:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \\ + \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \cdot 3 \\ + \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ + \\ \cdot(-\frac{1}{7}) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ + \\ \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \cdot(-1) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

ja siten ratkaisu on $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.

Harjoitus 2. Tutkitaan kompleksista matriisia ja vektoria

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 0 & 2 \\ 1 & 1-i & i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2-i \\ 3+2i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

(a) Ratkaise yhtälöryhmä $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ Gaussin eliminaatiolla.

(b) Tarkista ratkaisusi laskemalla $A\mathbf{v}$ suoraan.

(c) Mikä on tämän matriisin ydin $\ker A$?

(a) Lasketaan...

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & 1-i \\ i & 0 & 2 & 2-i \\ 1 & 1-i & i & 3+2i \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-i) \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & 1-i \\ 0 & 1 & 2-i & 1-2i \\ 0 & 1-2i & -1+i & 2+3i \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(2i-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & 1-i \\ 0 & 1 & 2-i & 1-2i \\ 0 & 0 & -1+6i & 5+7i \end{array}\right] \mid \cdot \tfrac{1}{-1+6i}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & 1-i \\ 0 & 1 & 2-i & 1-2i \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(5+7i)(-1-6i)}{37} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & 1-i \\ 0 & 1 & 2-i & 1-2i \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37-37i}{37} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2+i) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 1-i-(1-i) \\ 0 & 1 & 0 & 1-2i-(1-i)(2-i) \\ 0 & 0 & 1 & 1-i \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 1-i \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-i) \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 1-i \end{array}\right].$$

(b) Tarkistetaan!

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 0 & 2 \\ 1 & 1-i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1+1-i \\ i+2-2i \\ 1+1+i+1+i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-i \\ 2-i \\ 3+2i \end{bmatrix},$$

oikein!

(c) Jos laitettaisiin **b**:n paikalle nollavektori, laskut olisivat edelleen samat, paitsi lopussa oikealla puolella yhtälöä olisi vieläkin nollavektori. Tällöin saadaan $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, eli ydin koostuu vain nollavektorista.

Harjoitus 3. Olkoon

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Etsi B^{-1} ja ratkaise sillä yhtälöryhmä $B\mathbf{v} = \mathbf{c}$.

Vastaus. Etsitään ratkaisua X yhtälölle $BX = I$, missä I on 3×3 identiteettimatriisi. Toisin sanottuna etsitään vektoreita $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ja $\mathbf{v}_3$ jotka toteuttavat $B\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$, $B\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2$ ja $B\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$. Nämä vektorit ovat käänteismatriisimme sarakkeet. Ratkaistaan Gaussin eliminaatiolla:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 4 \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 5 \\ \cdot 5 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow + \\ \cdot(-1) \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 10 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \implies B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan yhtälö $B\mathbf{v} = \mathbf{c}$ kertomalla puolittain B^{-1}:llä:

$$B\mathbf{v} = \mathbf{c} \iff \overset{=I}{B^{-1}B}\,\mathbf{v} = B^{-1}\mathbf{c} \iff \mathbf{v} = B^{-1}\mathbf{c}.$$

Lasketaan auki:

$$\mathbf{v} = B^{-1}\mathbf{c} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 4. Olkoon a reaalinen parametri ja M_a matriisi

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Etsi kaikki luvut a, joilla M_a on kääntyvä. Laske myös M_3^{-1}.

Vastaus. Huom! Ensimmäisen kohdan voi tehdä myös determinantin avulla, josta kuullaan lisää ensi viikolla.

Voidaan selvittää matriisin kääntyvyys ratkaisemalla sen nolla-avaruus:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tällä matriisilla on nollarivi, jos $a = 2$. Muilla a:n arvoilla se on kääntyvä.

Etsitään käänteismatriisi kun $a = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \\ \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ \cdot 2 \leftarrow + \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ \cdot(-1) \\ \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right],$$

eli

$$M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$