MATRIISILASKENTA MS-A0001

ALKUVIIKON TEHTÄVÄT VIIKKO 4

Harjoitus 1. 2×2 käänteismatriisi.

Harjoitus 2. Todistustehtävä käänteismatriiseista.

Harjoitus 3. Vektorien kohtisuoruus.

Harjoitus 4. Vektorien kohtisuoruus ja Gram-Schmidt.

Harjoitus 5. Ortogonaalisuus ja determinantti.

Harjoitus 6. Normaaliyhtälö, pienimmän neliösumman ratkaisu.

Harjoitus 7.* Polynomit vektoreina, polynomien derivaatta matriisina.

Harjoitus 8.* Kantavektorit ja 2×2 kannanvaihtomatriisi.

Malliratkaisuja

Harjoitus 1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Etsi käänteismatriisi A^{-1} ja tarkista vastaus laskemalla AA^{-1} ja $A^{-1}A$.

Vastaus. Tapa 1. Etsitään Gaussin eliminaation avulla:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot -\frac{5}{2} \\ \leftarrow + \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot 2 \quad \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right].$$

Tapa 2. Käytetään kaavaa

$$A{-}1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}.$$

Koska $\det(A) = 6 - 5 = 1$, saadaan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 2. Todistustehtävä käänteismatriiseista.

Vastaus. Kuvitellaan, että olisikin kaksi käänteismatriisia, esim. B ja C, jotka toteuttavat $AB = BA = I$ ja $AC = CA = I$. Tällöin

$$AB = AC \overset{B\cdot}{\Longrightarrow} \overset{=I}{BA}\, B = \overset{=I}{BA}\, C \implies B = C,$$

eli "jokainen käänteismatriisi on yhtäsuuri"tai toisin sanottuna käänteismatriisi on uniikki.

Harjoitus 3. Vektorien kohtisuoruus.

Vastaus. Lasketaan pistetulot:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2 - 2 + 0 = 0, \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 1 + 2 - 3 = 0, \ \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 2 - 1 + 0 = 1 \neq 0,$$

eli $\mathbf{v}$ on kohtisuora $\mathbf{u}$:n ja $\mathbf{w}$:n kanssa, mutta $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{w}$ eivät kohtisuoria toisiinsa nähden.

Harjoitus 4. Vektorien kohtisuoruus ja Gram-Schmidt.

Vastaus. Ensimmäinen vektori voidaan pitää sellaisenaan: $\mathbf{w}_1 = (1, 1, 0)^\top$. Seuraavasta vektorista vähennetään $\mathbf{w}_1$:n suuntainen komponentti:

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}.$$

Voidaan huvikseen vielä skaalata murtoluvut pois niin tulee helpompia laskuja, eli $\mathbf{w}_2 = (1, -1, 2)^\top$. Viimeisestä vektorista otetaan pois $\mathbf{w}_1$ ja $\mathbf{w}_2$ suuntaiset komponentit:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2 \\ &= \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

tai jos skaalataan nätimmäksi niin $\mathbf{w}_3 = (-1, 1, 1)^\top$.

Vaihtoehtoisesti voitaisiin antaa yksikkövektoreina:

$$\hat{\mathbf{w}}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}, \ \hat{\mathbf{w}}_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}, \ \hat{\mathbf{w}}_3 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

Harjoitus 5. Olkoon

$$Q = \begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix}$$

. Millä parametrien a ja b arvoilla Q on ortogonaalinen? Etsi tällöin $\det Q$.

Vastaus. Halutaan, että $Q^\top = Q^{-1}$. Kaavasta tiedetään, että

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}, \text{ ja } Q^\top = \begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}.$$

Nämä ovat yhtäsuuret kun $\det(Q) = 1$, eli $a^2 + b^2 = 1$. Voidaan siis valita mitkä tahansa a ja b, kunhan $(a, b)^\top$ on yksikköympyrällä. Voitaisiin esittää nämä esim. kulman $\theta \in [0, 2\pi]$ avulla:

$$\begin{cases}a = \cos\theta\\b = \sin\theta\end{cases}$$

HUOM! Kaikki ortogonaaliset matriisit näyttävät tältä: säännöstä huomataan, että $Q_{11} = Q_{22}$ ja $Q_{12} = -Q_{21}$.

Harjoitus 6. Normaaliyhtälö, pienimmän neliösumman ratkaisu.

Vastaus. Halutaan ratkaista lineaarinen yhtälöryhmä $A^\top A\mathbf{v} = A^\top \mathbf{b}$, eli

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Tarkistetaan $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{v} = \frac{1}{6}(-1, 2, -1)^\top$ ja

$$A^\top \mathbf{r} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 + 2 - 1 \\ -1 + 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Harjoitus 7.* Kolmannen asteen polynomin voi ajatella neliulotteisena vektorina $ax^3 + bx^2 + cx + d \mapsto (a, b, c, d)^\top$. Etsi matriisi joka kuvaa muunnosta $p \mapsto p'$. Voiko samanlaisen löytää integraalifunktiolle?

Vastaus. Jos $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, niin $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, eli vektorimuodossa $(3a, 2b, c)^\top$. Tutkitaan käytöstä kantavektoreilla...

$$\begin{cases} (1,0,0,0)^\top \mapsto (3,0,0)^\top \\ (0,1,0,0)^\top \mapsto (0,2,0)^\top \\ (0,0,1,0)^\top \mapsto (0,0,1)^\top \\ (0,0,0,1)^\top \mapsto (0,0,0) \end{cases},$$

eli "derivaattamatriisimme"on

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entä integraali? Huom. kantavektorit vastaavat polynomeja x^i kun $i = 0, \ldots, 3$. Voidaan laskea

$$\begin{cases} \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C \\ \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \\ \int x\ dx = \frac{1}{2}x^2 + C \\ \int 1\ dx = x + C \end{cases},$$

ja jos jätetään vakiot C huomiotta, saataisiin 5×4-matriisi

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Valitettavasti vakiota C ei saada palautettua, esim. $\int p'(x)dx$ vastaisi tässä matriisia

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

jolloin $ax^3 + bx^2 + cx + d \overset{D}{\mapsto} 3ax^2 + 2bx + c \overset{\int}{\mapsto} ax^3 + bx^2 + cx$.
