MATRIISILASKENTA MS-A0001

KOTITEHTÄVÄT VIIKKO 3 – Malliratkaisut

Harjoitus 1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Laske näiden matriisien determinantit.

(b) Laske $\det(2AB^{-1})$.

(c) Laske $\det(B^2CA^{-1})$.

Vastaus.

(a) $\det(A) = -2$, $\det(B) = -1$, $\det(C) = 0$.

(b) $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det B} = -1$. Vakiolla kertominen voidaan ottaa ulos säännöllä $\det(kA) = k^n A$, missä n on matriisin koko, eli $\det(2AB^{-1}) = 2^3 \det(AB^{-1})$. Determinantti käyttäytyy siivosti tulon kanssa, eli $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, jolloin saadaan

$$\det(2AB^{-1}) = 8 \det(A) \det(B^{-1}) = 8 \cdot (-2) \cdot (-1) = 16.$$

(c) $\det(B^2CA^{-1}) = \det(B)^2 \overset{=0}{\det(C)} \det(A^{-1}) = 0$.

Harjoitus 2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Määritä matriisin A ominaisarvot.

(b) Etsi jokaista ominaisarvoa vastaava ominaisvektori.

(c) Tarkista, että laskemasi ominaisvektorit ovat varmasti ominaisvektoreita vertaamalla yhtälöön $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Vastaus.

(a) Ominaisarvo λ toteuttaa $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \implies (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$, eli etsitään sellaiset λ arvot, joille $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \implies \lambda \in \{1, 3, -2\}.$$

Yleisesti päteekin: jos matriisi on ylä- tai alakolmiomatriisi, saadaan ominaisarvot suoraan lävistäjältä.

(b) Ratkaistaan yhtälöt $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ saaduille λ:n arvoille:

$$\lambda_1 = 1 : \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{\cdot(-1)}{\underset{+}{\leftarrow\!\!\lrcorner}} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{\cdot 3}{\underset{+}{\leftarrow\!\!\lrcorner}} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ | \cdot (-1/2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\implies \mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)^\top \text{ (tai mikä tahansa monikerta, } (t, 0, 0)^\top.)$$

$$\lambda_2 = 3 : \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot (1/2) \\ \text{—}\!\!\rceil^{\cdot 4} \\ \text{←}\!\!\rfloor^{+} \end{array} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\implies \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)^\top \text{ (... tai } (t, t, 0)^\top \text{ mille tahansa } t \in \mathbb{R}).$$

$$\lambda_3 = -2 : \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{←}\!\!\rceil^{+} \\ \text{—}\!\!\rfloor_{\cdot(-2/5)} \end{array} \to \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2/5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot (1/3) \\ \mid \cdot (1/5) \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/15 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\implies \mathbf{v}_3 = (2/15, -1/5, 1)^\top \text{ tai esim. } \mathbf{v}_3 = (2, -3, 15)^\top.$$

(c) Tarkistus:

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1+0+0 \\ 0+0+0 \\ 0+0+0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{v}_1,$$

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+2+0 \\ 0+3+0 \\ 0+0+0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathbf{v}_2,$$

$$A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2-6+0 \\ 0-9+15 \\ 0+0-2 \cdot 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -30 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 15 \end{bmatrix} = \lambda_3 \mathbf{v}_3.$$

Ok!