MATRIISILASKENTA MS-A0001

TAULUTEHTÄVÄT VIIKKO 4 – Malliratkaisut

Harjoitus 1. Olkoon

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tarkista, että Q on ortogonaalinen. Etsi Q^{-1} ja näytä, että $|Q\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|$ kaikilla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Vastaus. Testataan $Q^\top Q = I$ ja $QQ^\top = I$, eli rivit ja sarakkeet ortonormaaleja: ovat yksikkövektoreita sillä $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 1$ ja sarakkeille pätee

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$$

sekä riveille

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0.$$

Täten $Q^{-1} = Q^\top$. Lisäksi

$$|Q\mathbf{v}|^2 = (Q\mathbf{v})^\top Q\mathbf{v} = \mathbf{v}^\top Q^\top Q\mathbf{v} = \mathbf{v}^\top \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2,$$

eli säilyttää pituudet.

Harjoitus 2. Etsi pienimmän neliösumman menetelmällä suora $y = kx + c$, joka sovitetaan pistejoukkoon $\{(0,1),(1,2),(2,2),(3,4)\}$. Kirjoita pienimmän neliösumman menetelmä matriisimuodossa $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, ja selvitä kyseinen matriisi A ja vektori $\mathbf{b}$. Etsi normaaliyhtälön kautta parhaat kertoimet k ja c.

Vastaus. Halutaan minimoida summaa $\sum_{i=1}^4 (y_i - kx_i - c)^2$. Olkoon $\mathbf{x} = (0,1,2,3)^\top$, $\mathbf{y} = (1,2,2,4)^\top$ ja $\mathbf{1} = (1,1,1,1)^\top$. Neliösumma voidaan kirjoittaa muodossa

$$(\mathbf{y} - k\mathbf{x} - c\mathbf{1})^\top (\mathbf{y} - k\mathbf{x} - c\mathbf{1}) = \|\mathbf{y} - k\mathbf{x} - c\mathbf{1}\|^2,$$

missä

$$\mathbf{y} - k\mathbf{x} - c\mathbf{1} = \begin{bmatrix} y_1 - kx_1 - c \\ y_2 - kx_2 - c \\ y_3 - kx_3 - c \\ y_4 - kx_4 - c \end{bmatrix}.$$

Huom. nyt minimoidaan muuttujien k ja c yli, eli $\mathbf{v} = (k,c)^\top$. Vakio $\mathbf{b}$ on siis $\mathbf{y}$, ja matriisi A ottaa muodon

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Saadaan

$$\min_{k,c} \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|^2 .$$

Ratkaisemalla normaaliyhtälö $A^\top A\mathbf{v} = A^\top \mathbf{b}$ saadaan ratkaisuksi $(k, c) = (\frac{9}{10}, \frac{9}{10})$.

Harjoitus 3. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}.$$

(a) Laske $\det(A_t)$ ja määritä kaikki t:n arvot, joilla A_t on kääntyvä.

(b) Etsi matriisin A_t aste ($\operatorname{rank}(A)$) myös niillä t:n arvoilla, joilla A_t ei ole kääntyvä.

Vastaus. (a) Lasketaan...

$$\det A_t = t(t^2 - 1) - 1(t - 0) + 0 \cdot (\dots) = t^3 - t - t = t^3 - 2t$$

Tämä on nolla kun

$$t(t^2 - 2) = 0 \implies \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases},$$

eli näillä t:n arvoilla ei ole kääntyvä.

(b) Etsitään nolla-avaruuden dimensiot, eli nollarivien määrä kun ollaan päästy porrasmuotoon.

$$\begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix} \overset{+\cdot(-t)}{\leftarrow} \to \begin{bmatrix} 0 & 1-t^2 & -t \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix} \overset{+\cdot(t^2-1)}{\leftarrow} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & t^3-2t \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix} \overset{\text{1. rivi alas}}{\to} \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & t^3-2t \end{bmatrix}$$

Kun $t \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$, saadaan yksi nollarivi, eli matriisin aste on näissä tapauksissa **kaksi** (muuten kolme).

(Huom. nämähän ovat matriisin $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ominaisarvoja?)

Harjoitus 4. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Laske matriisin A determinantti Gaussin eliminaatiolla.

(b) Laske determinantti myös kofaktoorimenetelmällä ensimmäisen rivin suhteen.

(c) Onkos A kääntyvä?

Vastaus. (a) Gaussista

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{+\cdot(-2)}{\leftarrow} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{+}{\leftarrow} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinantti saadaan nyt diagonaalialkioiden tulona, eli $\det(A) = 6$.

(b) Lasketaan kofaktorimenetelmällä...

$$1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (3-1) - 2 \cdot (0-2) + 0 = 2 + 4 = 6.$$

(c) On kääntyvä, determinantti ei nolla. (a)-kohdassakin huomattiin, ettei jäänyt nollarivejä.

YLIMÄÄRÄISET TEHTÄVÄT

Harjoitus 5. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriisi, jolle pätee

$$A^2 - 5A + 6I = 0.$$

(a) Osoita, että A on kääntyvä, ja esitä A^{-1} matriisin A avulla.

(b) Osoita, että kaikilla $k \geq 1$ pätee

$$A^k = (3^k - 2^k)A + (3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k)I.$$

Vastaus.

(a) Yhtälöstä $A^2 - 5A + 6I = 0$ saadaan

$$A^2 - 5A = -6I \iff \frac{5A - A^2}{6} = I \iff \frac{1}{6}(5I - A)A = I,$$

eli matriisi $\frac{1}{6}(5I - A)$ on matriisin A käänteismatriisi.

(b) Koitetaan induktiolla. Kun $k = 1$, saadaan

$$(3^1 - 2^1)\,A + (3 \cdot 2^1 - 2 \cdot 3^1)\,I = A,$$

eli pätee.

Oletetaan nyt, että kaava pätee jollekin yksittäiselle luvulle n. Tällöin

$$\begin{aligned} A^{n+1} = AA^n &\overset{(*)}{=} A \cdot ((3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I) = (3^n - 2^n)A^2 + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)A \\ &\overset{(**)}{=} (3^n - 2^n)(5A - 6I) + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)A \\ &= (5 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n)A + (2^n \cdot 6 - 3^n \cdot 6)I \\ &= (3^{n+1} - 2^{n+1})A + (3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1})I, \end{aligned}$$

eli kaava pätee.

$(*)$ Sijoitetaan kaava $A^n = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I$

$(**)$ Sijoitetaan $A^2 = 5A - 6I$

Harjoitus 6. Olkoon

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Etsi ominaisarvot parametrin t funktiona.

(b) Etsi näitä vastaavat ominaisvektorit.

(c) Millä parametrin t arvoilla A_t ei ole kääntyvä?

(d) Milloin matriisillla A_t on kaksi erisuurta ominaisarvoa?

Vastaus. (a) Huom. kun lasketaan $\det(A_t - \lambda I) = 0$, meillä on mukana käytännössä kaksi muuttujaa. Kuitekin t on parametri, jota voi pidetään mukana kuin vakiota, ja λ on muuttuja jonka suhteen ratkaistaan yhtälöä. Koitetaan:

$$\det\left(\begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} t-\lambda & 1 \\ 1 & t-\lambda \end{bmatrix} \overset{\text{m.v. } u=t-\lambda}{=} \det\begin{bmatrix} u & 1 \\ 1 & u \end{bmatrix} = u^2 - 1 = 0 \implies u = \pm 1$$
$$\implies t - \lambda = \pm 1 \implies \underline{\lambda = t \pm 1}.$$

Ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = t + 1$ ja $\lambda_2 = t - 1$.

(b) Ratkaistaan ominaisvektorit sijoittamalla λ_1 yhtälöön $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = 0$:

$$\lambda_1 : \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} - (t+1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-t-1 & 1 \\ 1 & t-t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow_{+}} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\implies (A - (t+1)I)\mathbf{v}_1 = 0 \implies -x_1 + x_2 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = (1,1)^\top$$

Tehdään sama sijoittamalla $\lambda_2 = t - 1$:

$$\lambda_2 : \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} - (t-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-t+1 & 1 \\ 1 & t-t+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\cdot(-1)}{\longleftarrow_{+}} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\implies (A - (t-1)I)\mathbf{v}_2 = 0 \implies x_1 + x_2 = 0 \implies \mathbf{v}_2 = (1,-1)^\top$$

(c) A_t ei ole kääntyvä kun $\det(A_t) = 0$, eli $t^2 = \pm 1$. Huom! Tämä on tismalleen silloin, kun A_t:lla on nolla ominaisarvona.

(d) Katsotaas milloin $t + 1 \neq t - 1 \implies 1 \neq -1$ eli aina, eli on aina kaksi erisuurta ominaisarvoa.