MATRIISILASKENTA MS-A0001

ALKUVIIKON TEHTÄVÄT VIIKKO 5

Harjoitus 1. Parametrisoidun matriisin kääntyvyys ja yhtälöryhmät.

Harjoitus 2. Determinantin laskusääntöjä.

Harjoitus 3. Pienen matriisin ominaisarvot.

Harjoitus 4. Matriisin ominaisarvohajotelma ja matriisin potenssit.

Harjoitus 5. Ominaisvektorit iteratiivisessa mallissa.

Harjoitus 6. Kaksiulotteinen ominaisavaruus!

Harjoitus 7. Moninkertainen ominaisarvo, parametrisoidun matriisin ominaisarvot.

Harjoitus 8.* Ominaisvektorien riippumattomuus.

Malliratkaisuja

Harjoitus 1. Tarkastellaan parametrin $t \in \mathbb{R}$ määräämää matriisia

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 2 & t-1 \end{bmatrix}.$$

(a) Laske $\det(A_t)$.

(b) Määritä kaikki parametrin t arvot, joilla A_t on kääntyvä.

(c) Ratkaise yhtälöryhmä

$$A_t \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

kun $t = 0$ ja $t = 2$.

Vastaus. (a) $\det(A_t) = t(t-1) - 2 = \underline{t^2 - t - 2}$.

(b) Tämä toteutuu kun $\det(A_t) \neq 0$, eli silloin kun $t \notin \{2, -1\}$.

(c) Voidaan ratkaista arvolle $t = 0$ käänteismatriisin avulla:

$$\mathbf{x} = A_0^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kun $t = 2$, ei käänteismatriisia ole olemassa. Voidaan ratkaista Gaussin eliminaatiolla, saadaan äärettömän monta ratkaisua tai ei ollenkaan ratkaisuja:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \implies 0 = 1 \text{ eli ei ratkaisua}$$

Harjoitus 2. Olkoon $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ kääntyviä matriiseja, joille

$$\det(A) = -2,\ \det(B) = 3.$$

Laske seuraavat determinantit:

(a) $\det(2A)$

(b) $\det(A^\top)$

(c) $\det(A^{-1})$

(d) $\det(A^\top B^{-1} A)$

Vastaus. Käytetään laskusääntöjä $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, $\det(A^\top) = \det(A)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ja $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

(a) $\det(2A) = 2^3 \det(A) = 8 \cdot (-2) = -16$.

(b) $\det(A^\top) = \det(A) = -2$.

(c) $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = -1/2$.

(d) $\det(A^\top B^{-1} A) = \det(A)^2 \det(B)^{-1} = 4/3$.

Harjoitus 3. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Etsi ominaisarvot.

(b) Etsi jokaiselle ominaisarvolle ominaisvektori.

(c) Tarkista vastaus laskemalla auki $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Vastaus.

(a) Tapa 1. Ratkaistaan $\det(A - \lambda I) = 0$, eli

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)^2 - 1 = 0 \implies (4-\lambda)^2 = 1 \implies 4 - \lambda = \pm 1 \implies$$
$$\lambda = 4 \pm 1.$$

Ominaisarvot siis $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_2 = 3$.

(b) Ratkaistaan yhtälöt $(A - \lambda_i I)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 1 & 4-5 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \implies \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_1 = (1,1)^\top,$$

ja

$$\begin{bmatrix} 4-3 & 1 \\ 1 & 4-3 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_2 = (1,-1)^\top.$$

(c) Tarkistetaan:

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 5\end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ -3\end{bmatrix},$$

kumpikin ok.

Harjoitus 4. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$

(a) Määritä ominaisarvot ja -vektorit.

(b) Muodosta matriisit P ja D, joille

$$A = PDP^{-1},$$

missä D on diagonaalinen.

(c) Laske matriisi A^4 diagonalisaation avulla.

Vastaus. (a) Ominaisarvot voidaan lukea diagonaalilta, koska A on yläkolmiomatriisi: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Ratkaistaan vastaavat ominaisvektorit:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_1 = (1,0)^\top,$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_2 = (1,1)^\top,$$

(b) Koska $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$, voidaan asettaa $P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}2]$, jolloin saadaan

$$AP = \begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} = DP.$$

Kertomalla puolittain vasemmalta P^{-1}:llä saadaan $AP = PD \implies A = PDP^{-1}$. Varmistetaan vielä lyhyesti, että P tosiaan on kääntyvä: $\det(P) = 1 \neq 0$, eli ok.

(c) Lasketaan A^4. Huom. $(PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$, joten induktiolla $A^4 = PD^4P^{-1}$. Saadaan $P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, jolloin

$$A^4 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^4 & \\ & 3^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & -16\\ 0 & 81\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 65\\ 0 & 81\end{bmatrix}.$$

Harjoitus 5. Tarkastellaan kahden suureen kehitystä kuvaavaa lineaarista mallia

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k,\ A = \begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}.$$

(a) Määritä matriisin A ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisavaruudet.

(b) Osoita, että jos alkuarvo $\mathbf{x}_0$ kuuluu jompaankumpaan ominaisavaruuteen, myös $\mathbf{x}_k$ kuuluu samaan avaruuteen kaikilla k.

(c) Oletetaan, että $\mathbf{x}_0 = (1, -2)^\top$. Laske $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2$ ja päättele yleinen kaava $\mathbf{x}_k$.

Vastaus. (a) Ominaisarvot determinantista: $\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5)$. Ominaisavaruudet ratkaisemalla $A - \lambda_i I$ nolla-avaruus:

$$(A - 2 \cdot I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0 \implies \mathbf{x} = (t, -2t)^\top$$

$$(A - 5 \cdot I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0 \implies \mathbf{x} = (t, t)^\top.$$

Eli ominaisavaruudet ovat $\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$ ja $\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

(b) Jos $\mathbf{x}_0$ kuuluu ominaisavaruuteen, se on muotoa $x_0 = \alpha \mathbf{v}_i$ jommalle kummalle ominaisvektorille. Tällöin

$$A\mathbf{x}_0 = A\alpha\mathbf{v}_i = \alpha A\mathbf{v}_i = \alpha\lambda_i\mathbf{v}_i \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_i),$$

jolloin $\mathbf{x}_1$ kuuluu myös samaan ominaisavaruuteen. Induktiolla väite pätee kaikille $\mathbf{x}_k$.

(c) $\mathbf{x}_0 = (1, -2)^\top$, eli ominaisarvoa 3 vastaava ominaisvektori. Tällöin $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = 3\mathbf{x}_0$ ja $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = 3^2\mathbf{x}_0$. Yleinen kaava on siis $\mathbf{x}_k = 3^k\mathbf{x}_0$.

Harjoitus 6. Kolmen mittauspisteen arvoja kuvaava vektori on $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$. Tarkastellaan muunnosta, jonka matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Määritä matriisin A ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisavaruudet.

(b) Osoita suoraan, että vektori $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ on ominaisvektori, ja määritä sitä vastaava ominaisarvo.

(c) Kuvaile geometrisesti ominaisavaruutta, joka vastaa jotakin muuta ominaisarvoa kuin kohdassa (b) saamaasi ominaisarvoa. Miten lineaarikuvaus A käyttäytyy tällaisessa ominaisavaruudessa?

Vastaus. (a) Lasketaan $\det(A - \lambda I)$:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \overset{u=2-\lambda}{=} \begin{bmatrix} u & 1 & 1 \\ 1 & u & 1 \\ 1 & 1 & u \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow\!\!\urcorner{}_{+} \\ \llcorner\!\!\rightarrow{}_{\cdot(-u)} \\ \leftarrow\!\!\lrcorner{}_{+} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \urcorner_{\cdot(-1)} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1-u^2 & 1-u \\ 1 & u & 1 \\ 0 & 1-u & u-1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow\!\!\urcorner{}_{+} \\ \\ \llcorner\!\!\rightarrow{}_{\cdot(-1-u)} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-u-u^2+1 \\ 1 & u & 1 \\ 0 & 1-u & u-1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{=(u-1)(u+2)}{\implies} (u^2+u-2)\,(u-1) = 0 \implies u \in \{1,-2\} \overset{\lambda=2-u}{\implies} \underline{\lambda \in \{1,4\}}$$

Lasketaan ominaisavaruudet sijoittamalla:

$$\lambda_1 = 1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \llcorner\!\!\rightarrow{}_{\cdot(-1)} \\ \leftarrow\!\!\urcorner{}_{+} \\ \leftarrow\!\!\lrcorner{}_{+} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \urcorner_{\cdot(-1)} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x_3 = -x_1 - x_2$$

$$\implies \mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ V_1 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right),$$

ja

$$\lambda_2 = 4: \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow\!\!\urcorner{}_{+} \\ \llcorner\!\!\rightarrow{}_{\cdot(2)} \\ \leftarrow\!\!\lrcorner{}_{+} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \urcorner_{\cdot(-1)} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow\!\!\lrcorner{}_{+} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \urcorner \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 1/3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = 2x_2 - x_3 = x_3 \end{cases} \implies V_2 = \operatorname{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Huomattiin jo aiemmin, että $(1,1,1)^\top$ virittää yhden ominaisavaruuksista, mutta tarkistetaan vielä suoraan.

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2+1+1 \\ 1+2+1 \\ 1+1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\mathbf{u},$$

checks out.

(c) Ominaisavaruus V_1 on kaksiulotteinen eli taso $\mathbb{R}^3$:ssa, esim. yhtälön $z = -x - y$ virittämä. Katsotaan mitä A tekee tämän avaruuden vektoreille:

$$A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha-\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha+\beta-\alpha-\beta \\ \alpha+2\beta-\alpha-\beta \\ \alpha+\beta-2\alpha-2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha-\beta \end{bmatrix},$$

eli pitää ne ennallaan :)

Harjoitus 7. Tarkastellaan parametrin $t \in \mathbb{R}$ määräämää matriisia

$$A_t = \begin{bmatrix} 3 & t \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Määritä ominaisarvot kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

(b) Ratkaise ominaisvektoriyhtälö $A_t\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$ ja määritä ominaisavaruus tapauksissa $t = 0$ ja $t \neq 0$.

(c) Millä parametrin t arvoilla vektori $\mathbf{v} = (1, 1)^\top$ on ominaisvektori?

(d) Selitä, miksi sama ominaisarvo ei välttämättä tarkoita, että ominaisavaruus olisi kaikilla parametrin arvoilla samanlainen.

Vastaus. (a) Yläkolmiomatriisi, ominaisarvot saadaan lävistäjältä: 3 ja 3. Riippumattomia t:n arvosta!

(b) Olkoon $\mathbf{v} = (x, y)^\top$.

$$A_t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3x + ty \\ 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix} \implies ty = 0.$$

Jos $t = 0$, mikä tahansa vektori toteuttaa yhtälön, ja ominaisavaruus on $\mathbb{R}^2$. Ominaisvektoreiksi voidaan valita vaikka $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$. Jos $t \neq 0$, on oltava $y = 0$, jolloin ominaisvektori on $\mathbf{v} = (1, 0)^\top$.

(c) Kun $t \neq 0$, vain vektorin $(1, 0)^\top$ suuntaiset vektorit ovat ominaisvektoreita, eli $(1, 1)^\top$ ei sovi. Kun $t = 0$, mikä tahansa vektori on ominaisvektori, eli myös $(1, 1)^\top$.

(d) Ominaisarvo yksinään ei riitä määrittämään matriisin rakennetta. Eri matriiseilla voi olla sama ominaisarvo, mutta eri ominaisvektorit. Tässä tilanteessa ominaisarvot eivät riipu t:n arvosta, mutta matriisin A_t rakenne silti riippuu, jolloin se vaikuttaa ominaisvektoreihin.

Harjoitus 8.* Osoita, että eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit muodostavat aina lineaarisesti riippumattoman vektorijonon.

Vastaus. Olkoon $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ eri ominaisarvoja, jokaisella ominaisvektori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Tehdään tämä induktiolla (huom. yksi nollasta poikeava vektori on aina lineaarisesti riippumaton joukko vektoreita), eli oletetaan että k:n vektorin joukko on lineaarisesti riippumaton, ja lisätään ominaispari $(\lambda_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1})$, missä $\lambda_{k+1} \neq \lambda_i$ kaikille $i \leq k$. Oletetaan vastaoletuksena, että $\mathbf{v}_{k+1}$ on riippuvainen vektoreista $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, eli voidaan esittää

$$\mathbf{v}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i \implies A\mathbf{v}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A\mathbf{v}_i \implies \lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Siispä

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{k+1}\alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i \implies \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\mathbf{v}_i = 0$$

ja koska $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ oletettiin riippumattomiksi, saadaan $\alpha_i \overset{\neq 0}{(\lambda_{k+1} - \lambda_i)} = 0 \implies \alpha_i = 0$. Tällöin $\mathbf{v}_{k+1}$ olisi nollavektori, mikä on ristiriita, sillä $\mathbf{v}_{k+1}$ on A:n ominaisvektori (eikä siis voi olla nollavektori).