MATRIISILASKENTA MS-A0001

TAULUTEHTÄVÄT VIIKKO 5 – Malliratkaisut

Harjoitus 1.

(a) Koska $A = P_t D P_t^{-1} \implies AP_t = P_t D$, saadaan

$$AP_t = \begin{bmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}\mathbf{p}_1 & D_{22}\mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = P_t D,$$

missä $\mathbf{p}_i$ ovat matriisin P_t sarakkeet. Tästä saadaan siis, että ominaisarvot ovat 1 ja -1 ja vastaavat ominaisvektorit $(1, -t)^\top$ ja $(t, 1)$.

(b) P_t:n sarakkeet (ja rivit) ovat selvästi kohtisuorat kaikilla t arvoilla, mutta ne ovat yksikkövektoreita vain kun $t = \pm 1$.

(c) Lasketaan auki...

$$A = P_t D P_t^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -t \\ -t & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-t^2 & -2t \\ -2t & t^2-1 \end{bmatrix},$$

on symmetrinen.

Harjoitus 2.

(a) Ominaisarvot $\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda^2) - 1 = 0 \implies \lambda = 3 \pm 1$, eli $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$. Vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, eli $(1, 1)^\top$ ja $(1, -1)^\top$.

(b) Ovat jo ortogonaalisia, eli normeerataan vain: $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^\top$, $\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^\top$.

(c) Matriisin P sarakkeet ovat normeeratut ominaisvektorit ja diagonaalisen matriisin lävistäjällä ovat ominaisarvot, eli

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 3. Avataan $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = A_{11}x^2 + (A_{12} + A_{21})xy + A_{22}y^2$ ja vertaillaan kertoimia, saadaan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

eli ominaisarvot kuten tehtävässä 2: $\lambda_1 = 4$ ja $\lambda_2 = 2$. Koska kumpikin positiivisia, on matriisi **positiivisesti definiitti**.

Harjoitus 4.

(a) Diagonaaliselle matriisille pätee $(D^k)_{ii} = D_{ii}^k$, eli

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

(b) Lasketaan...

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A_{11})^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A_{22})^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

(c) Ratkaistaan, olkoon $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^\top$:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ -2y(t) \end{bmatrix}, \; x(0) = a, \; y(0) = b.$$

Tästä saadaan $x(t) = Ce^t$ ja $y(t) = De^{-2t}$, ja alkuarvoista sijoittamalla saadaan $x(t) = ae^t$ ja $y(t) = be^{-2t}$, eli $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0)$.

YLIMÄÄRÄISET TEHTÄVÄT

Harjoitus 5. Ominaisarvot saadaan lävistäjältä: $\lambda_1 = 2$. Tämän ominaisarvon algebrallinen kertaluku on kaksi. Sen geometrinen kertaluku on yksi, sillä sitä vastaa vain yksi lineaarisesti riippumaton ominaisvektori:

$$(A - 2I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v} = (1, 0)^\top.$$

Todistetaan seuraavaksi, ettei A voi olla diagonalisoituva, eli ei ole olemassa matriiseja D (diagonaalinen) ja P (kääntyvä) joille pätee $A = PDP^{-1}$. Oletetaan vastaoletuksena, että sellaiset matriisit löytyvät, ja $A = PDP^{-1} \implies AP = PD$. Tällöin

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}\mathbf{p}_1 & D_{22}\mathbf{p}_2 \end{bmatrix},$$

eli $(D_{ii}, \mathbf{p}_i)$ on pakosti matriisin A ominaispari. Koska A:n ainoa ominaisarvo on 2, on oltava $D = \operatorname{diag}(2, 2)$ ja siten $\mathbf{p}_1$ ja $\mathbf{p}_2$ ovat kumpikin ominaisvektoreita ominaisarvolle 2. Tällöin

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sillä ominaisarvoa 2 vastaavan ominaisvektorin on oltava $(1, 0)^\top$ suuntainen, mutta $\det(P) = 0$, jolloin se ei voi olla kääntyvä.

Harjoitus 6.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Ominaisarvot $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - t^2 = 0 \implies (1-\lambda)^2 = t^2 \implies 1 - \lambda = \pm t \implies \lambda = 1 \pm t$.

(c) Positiivisesti definiitti kun $\lambda_i > 0$ kaikille ominaisarvoille, eli

$$\begin{cases} 1 + t > 0 \implies t > -1 \\ 1 - t > 0 \implies t < 1 \end{cases}$$

eli $t \in (-1, 1)$.

(d) Korvataan (c)-kohdassa $>$ merkillä $\geq$, eli $t \in [-1, 1]$.

(e) Matriisi on epädefiniitti kun se ei ole positiivisesti semidefiniitti tai negatiivisesti semidefiniitti. Koska $A_{11} + A_{22} = 2 = \lambda_1 + \lambda_2$, ei matriisilla ikinä voi olla kahta negatiivista ominaisarvoa, eli se ei ole koskaan negatiivisesti definiitti. Täten matriisi on epädefiniitti kun (d)-kohdan ehto ei toteudu, eli silloin kun $t \notin [-1, 1]$.

Vaihtoehtoisesti samaan tulokseen päästään, kun A:lla on kaksi erimerkkistä ominaisarvoa, eli

$$\begin{cases} 1+t>0 \implies t>-1 \\ 1-t<0 \implies t>1 \end{cases} \implies t>1$$

tai

$$\begin{cases} 1+t<0 \implies t<-1 \\ 1-t>0 \implies t<1 \end{cases} \implies t<-1,$$

eli kun $t \notin [-1,1]$.