MATRIISILASKENTA MS-A0001

KOTITEHTÄVÄT VIIKKO 6 – Malliratkaisut

Harjoitus 1. Olkoon matriisi A symmetrinen ja kääntyvä. Todista diagonalisoimalla matriisi A, että myös A^{-1} on symmetrinen.

Vastaus. Koska A on symmetrinen, voidaan muodostaa ominaisvektoreista ortonormaali kanta, jolloin

$$A = P\Lambda P^\top,$$

missä Λ on diagonaalinen. Koska A on kääntyvä, ei sillä ole nolla-ominaisarvoja, ja siten Λ on kääntyvä:

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \implies \Lambda^{-1} = \operatorname{diag}(1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n).$$

Nyt siis

$$\begin{aligned}
&AA^{-1} = I && \text{sijoita } A = P\Lambda P^\top \\
&(P\Lambda P^\top)A^{-1} = I && \text{kerro vasemmalta } P^\top \\
&\Lambda P^\top A^{-1} = P^\top && \text{kerro vasemmalta } \Lambda^{-1} \\
&P^\top A^{-1} = \Lambda^{-1} P^\top && \text{kerro vasemmalta } P \\
&A^{-1} = P\Lambda^{-1} P^\top
\end{aligned}$$

jolloin $(A^{-1})^\top = (P\Lambda^{-1}P^\top)^\top = (P^\top)^\top(\Lambda^{-1})^\top P^\top = P\Lambda^{-1}P^\top = A^{-1}$, eli A^{-1} on symmetrinen.

Ilman diagonalisointia: Jos A on kääntyvä ja symmetrinen, ja A^{-1} on sen käänteismatriisi, niin silloin myös $(A^{-1})^\top$ on sen käänteismatriisi:

$$\begin{aligned}
A(A^{-1})^\top &= A^\top (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I^\top = I \\
(A^{-1})^\top A &= (A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = I^\top = I.
\end{aligned}$$

Koska jokaisella matriisilla on korkeintaan yksi käänteismatriisi, pätee $A^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Laskusäännöllä $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$:

$$A^{-1} \overset{A=A^\top}{=} (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

Harjoitus 2. Ratkaistaan ensin $\ker A$, sillä jos löydetään epätriviaali ratkaisu $A\mathbf{x} = 0$, niin silloin $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = 0$, missä $\mathbf{a}_i$ ovat A:n sarakkeet. Käytetään Gaussin eliminaatiota

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot 2 \leftarrow + \\ \cdot(-1) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot 3 \leftarrow + \\ \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix} 6 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{6} \\ \cdot \frac{1}{3} \\ \\ \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eli nolla-avaruuden virittää vektori $(2, 3, -1)^\top$. Nämä ovat myös kertoimet A:n sarakkeille, joilla lineaarinen riippuvuus voidaan osoittaa:

$$2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 3.

(a) Tämä onnistuu silloin, kun matriisi A on symmetrinen, eli $b = 1$.

(b) Tämä käy silloin, kun matriisilla on ominaisarvo, jonka algebrallinen kertaluku on 2, mutta geometrinen 1. Ensinnäkin on oltava kaksi yhtäsuurta ominaisarvoa, eli $\det(A - \lambda I) = (\lambda - a)^2$ jollekin luvulle a. Katsotaan:

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(-\lambda) - b = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda - b = 0,$$

eli $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+4b}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+b}$, jolloin kaksi ominaisarvoa ovat yhtä suuret (eli $\lambda = 1$) vain kun $b = -1$. Katsotaan, onko tässä tapauksessa vain yksi riippumaton ominaisvektori:

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{v}_1 = (1,1)^\top.$$

Saadaan vain yksi riippumaton ominaisvektori ominaisarvolle 1, eli ei ole diagonalisoituva kun $b = -1$.

Harjoitus 4. Ratkaistaan

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot 2 \leftarrow + \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot 3 \leftarrow + \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot 3 \leftarrow + \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{1}{6} \\ \mid \cdot \frac{1}{3} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eli saadaan ratkaisuksi $\mathbf{v} = (1,1)^\top$. Saadaan $\det(AA^\top) = 0$. Tämä oli odotettavissa, sillä A:lla on vain kaksi lineaarisesti riippumatonta saraketta, ja $AA^\top$:n sarakkeet ovat A:n sarakkeiden lineaarikombinaatioita.

Harjoitus 5.

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 13 \\ -9 & 29 & 2 \\ 13 & 2 & 58 \end{bmatrix}$$

ja Gauss-Jordanilla

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 11 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-8) \\ \mid \cdot 5 \leftarrow + \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -8 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \cdot 7 \quad \cdot 7 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 15 & -56 & 35 \\ 0 & 5 & 0 & 15 & -55 & 35 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -8 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot 5 \leftarrow + \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 45 & -170 & 105 \\ 0 & 5 & 0 & 15 & -55 & 35 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -8 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{1}{5} \\ \mid \cdot \frac{1}{5} \\ \mid \cdot (-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -34 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

Harjoitus 6. Etsitään ensin ominaisarvot:

$$\det(A-\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda^2 = -1 \implies \lambda = \pm i.$$

Ominaisvektorit saadaan sijoittamalla $-\lambda_i x - y = 0 \implies y = -\lambda_i x$, eli

$$\mathbf{v}_1 = (1,-i)^\top,\ \mathbf{v}_2 = (1,i)^\top \text{ ja } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix},\ \det(P) = 2i,\ P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & i/2 \\ 1/2 & -i/2 \end{bmatrix},$$

joten

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & i/2 \\ 1/2 & -i/2 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 7. Matriisi A on symmetrinen, eli sen ominaisvektorit ovat ortogonaalisia. Toinen ominaisvektori on siis $\mathbf{v}_2 = (-2,1)^\top$. Ortonormaali kanta on siis

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ja laskemalla auki hajotelma $A = Q\Lambda Q^\top$ saadaan

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Harjoitus 8.* Riittää osoittaa, että jos $\mathbf{v}$ on A:n ominaisvektori, niin $B\mathbf{v}$ on myös A:n ominaisvektori samalle ominaisarvolle λ:

$$A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v} = (BA)\mathbf{v} = B(A\mathbf{v}) = B(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(B\mathbf{v}).$$

Ok, eli $B\mathbf{v}$ on A:n ominaisvektori ominaisarvolla λ.

Jos $\dim V_{\lambda_i} = 1$, sen virittää yksi vektori, sanotaan $\mathbf{v}_i$. Koska $B\mathbf{v}_i \in V_{\lambda_i} = \operatorname{span}(\mathbf{v}_i)$ (aiemman kohdan perusteella), on olemassa kerroin γ_i siten että $B\mathbf{v}_i = \gamma_i\mathbf{v}_i$. Siispä

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i \implies B\mathbf{v}_i = \gamma_i\mathbf{v}_i$$

ja jos A on diagonalisoituva, eli sillä on n riippumatonta ominaisvektoria, on B:llä myös. Voidaan siis asettaa

$$P = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n],\ D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n),\ G = \operatorname{diag}(\gamma_1,\dots,\gamma_n).$$