Tapettiryhmät

Aleksis Koski

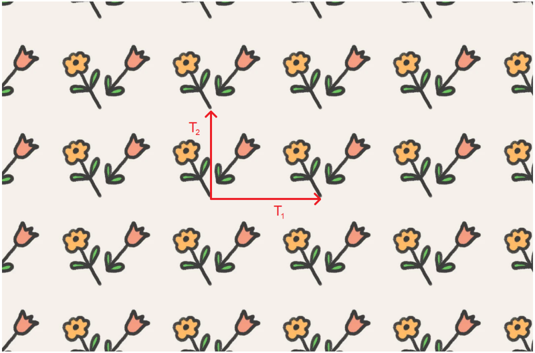
Tasokuviot

Tutkitaan seuraavaa kuviota joka voisi esiintyä tapetilla:

Halutaan ymmärtää, miten tällaisen kuvion ominaisuuksia voidaan ilmaista matemaattisesti.

Tasokuviot

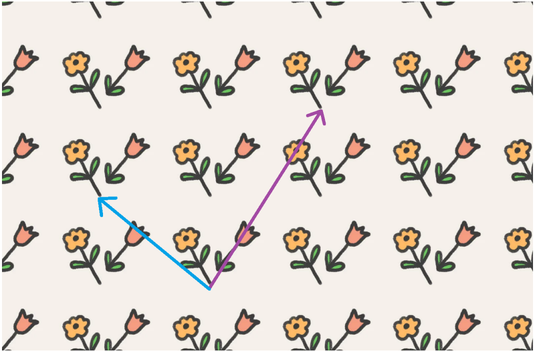
Huomaa, että kuviota voi siirtää kahteen suuntaan ilman että se muuttuu:



Sanotaan, että kuvio on **symmetrinen** tai **invariantti** siirtojen T_1 ja T_2 suhteen.

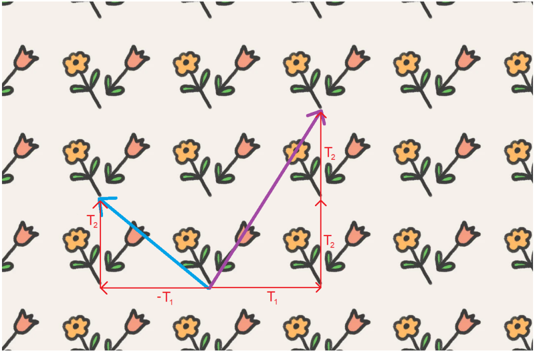
Tasokuviot

On muitakin siirtoja, jotka pitävät kuvan samana:



Tasokuviot

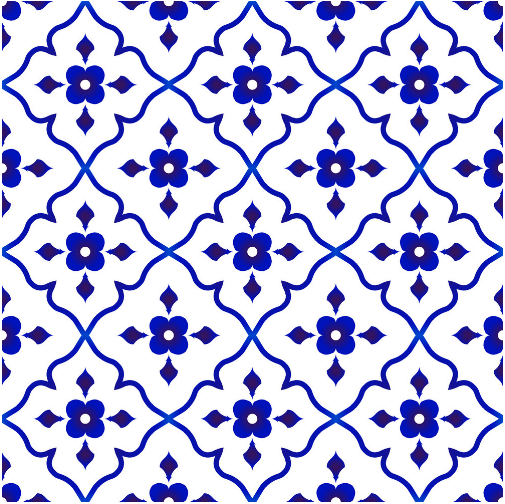
On muitakin siirtoja, jotka pitävät kuvan samana:



Mutta nämä voi kaikki esittää siirtojen T_1 ja T_2 avulla.

Tasokuviot

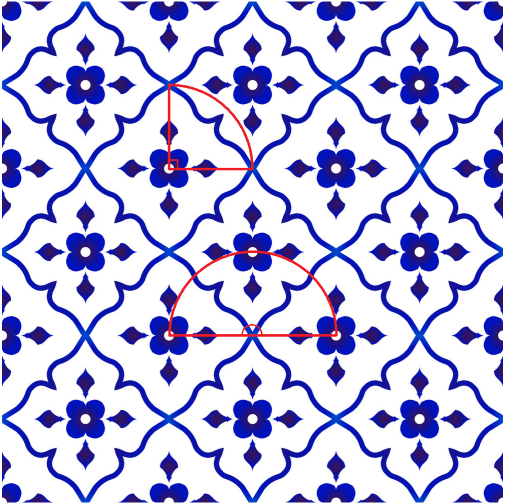
On myös kuvioita joilla on enemmän symmetrioita:



Tämäkin kuvio on symmetrinen kahden siirron suhteen.

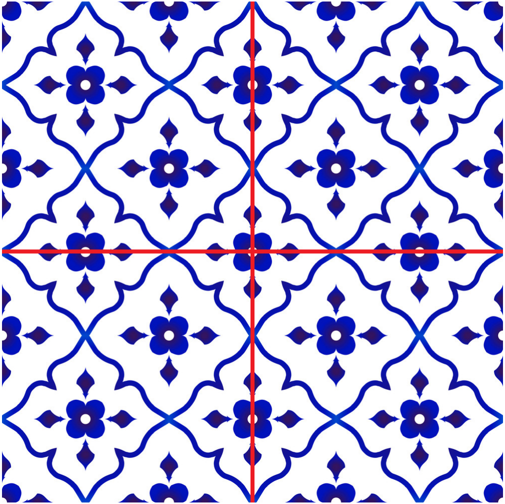
Tasokuviot

Sillä on myös 90- ja 180-asteen rotaatiosymmetria:



Tasokuviot

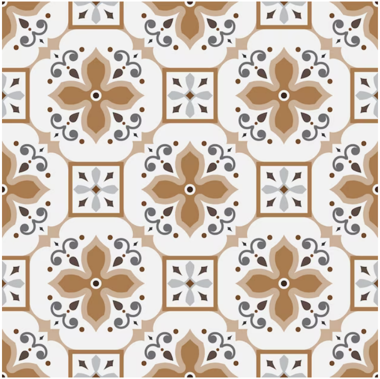
Ja sillä on peilisymmetrioita (tiettyjen suorien suhteen):



Löydätkö kuvasta lisää peilisymmetrioita?

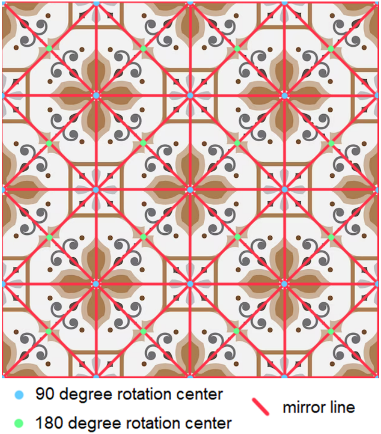
Tapettiryhmät

Voimme luokitella itseään toistavat tasokuviot niiden symmetrioiden avulla.



Tässä *itseään toistava* tarkoittaa “symmetrinen kahden erisuuntaisen siirron suhteen”.

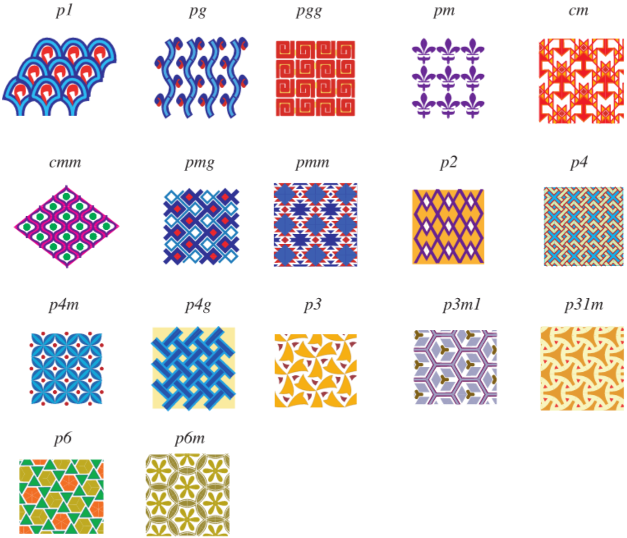
Tapettiryhmät



Kaikkien kuvion symmetrioiden muodostama joukko on kyseisen kuvion **tapettiryhmä**.

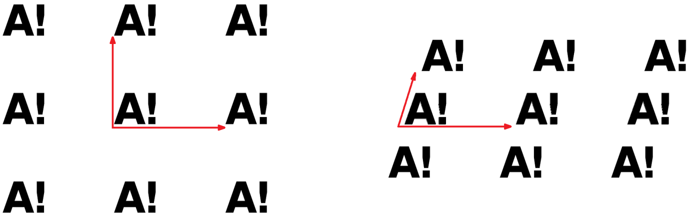
Tapettiryhmät

Osoittautuu, että on vain 17 erilaista tapettiryhmää.



Sama vai eri?

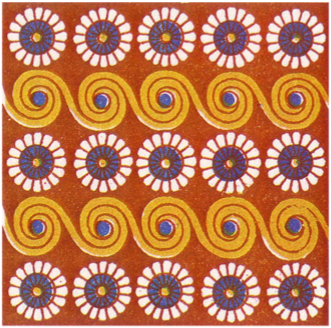
Jos halutaan selvittää kuuluvatko kaksi kuviota samaan tapettiryhmään, pitää selvittää vastaavatko molempien kuvioiden symmetriat toisiaan.

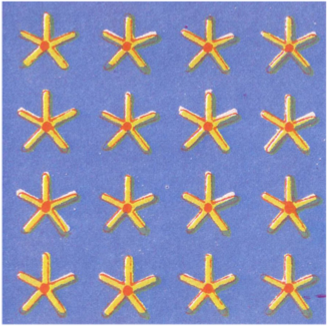


Näiden kahden kuvion siirtosymmetrioilla on eri suunnat ja suuruudet, mutta tämä vielä sallitaan. Molemmat kuviot kuuluvat samaan tapettiryhmään $p1$ koska niissä ei ole muita symmetrioita.

Sama vai eri?

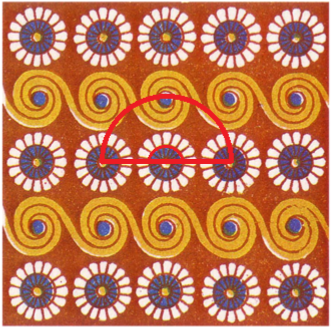
Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



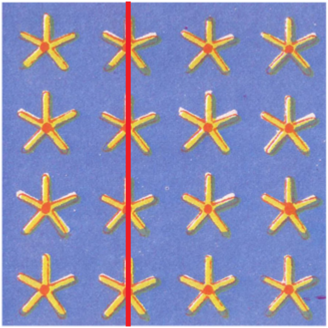


Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



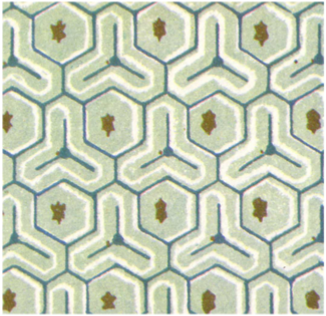
180 degree rotational symmetry



mirror symmetry

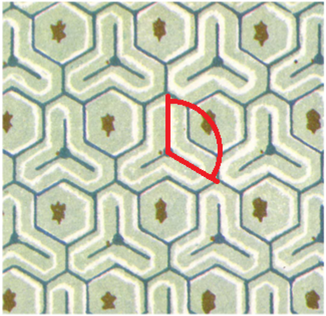
Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?

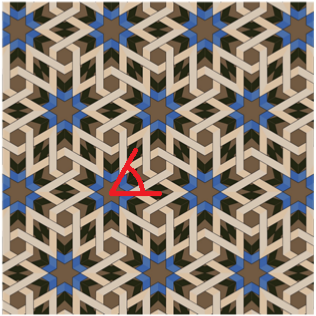


Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



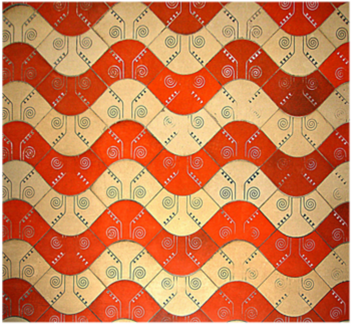
120 degree rotational symmetry

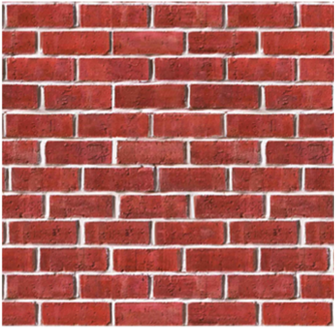


60 degree rotational symmetry

Sama vai eri?

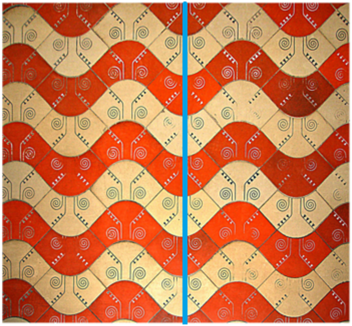
Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



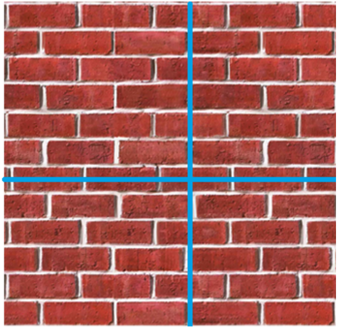


Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



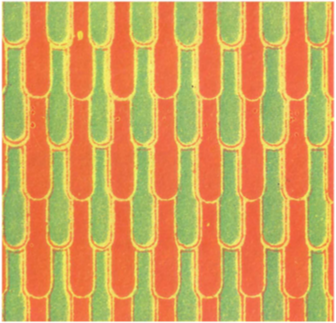
mirror symmetry along lines in one direction

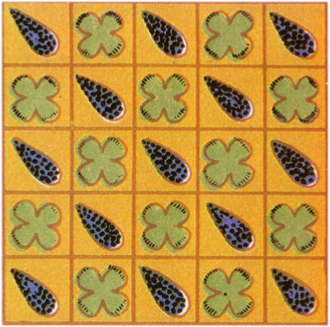


mirror symmetry along lines in two directions

Sama vai eri?

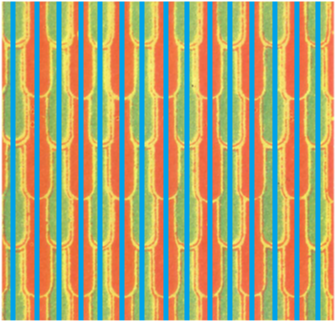
Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?

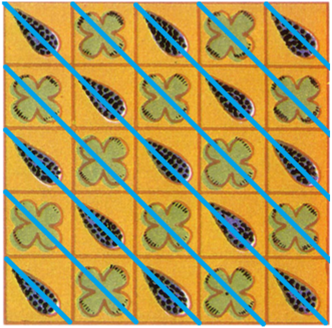




Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?

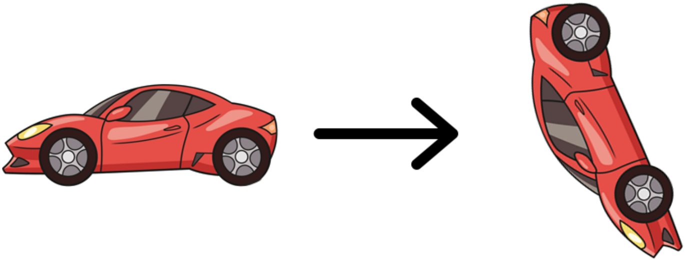




Apart from translational symmetry, both patterns are only symmetric along mirror lines (highlighted) in the same direction as the translational symmetry. Since the only difference is the size and direction of the translational symmetry, both groups are the same (pm).

Isometriat

Tutkitaan nyt vähän tarkemmin mitä mahdollisia symmetrioita kuvioilla voi olla.



Sanotaan, että tason kuvaus $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on **isometria** jos se pitää pisteiden väliset etäisyydet (ja kulmat) ennallaan.

Isometriat

Tason isometrioihin kuuluu:

Siirto

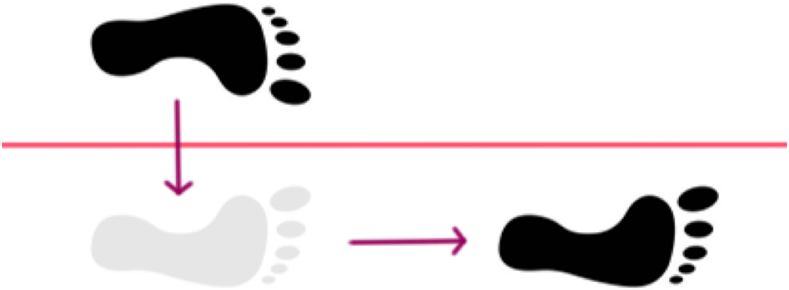
Rotaatio

Peilaus

Itse asiassa kaikki tason isometriat voidaan esittää näiden kolmen perusisometrian yhdistelminä.

Isometriat

On hyvä erotella myös eräs tason isometria nimeltä **liukupeilaus**:



Liukupeilauksessa ensin peilataan suoran suhteen, sitten tehdään siirto saman suoran suuntaisesti.

Isometriat

Tason isometrioille saadaan nyt yksinkertainen luokittelu.

Lause. Jokainen tason isometria on joko:

- **Siirto** (sopivan suunnan ja etäisyyden suhteen)
- **Rotaatio** (sopivan keskipisteen ja kulman suhteen)
- **Liukupeilaus** (sopivan suoran ja etäisyyden suhteen)

Siis myös jokainen tapettikuvioissa esiintyvä symmetria on joku näistä kolmesta vaihtoehdosta.