

Tapettiryhmät

Aleksis Koski

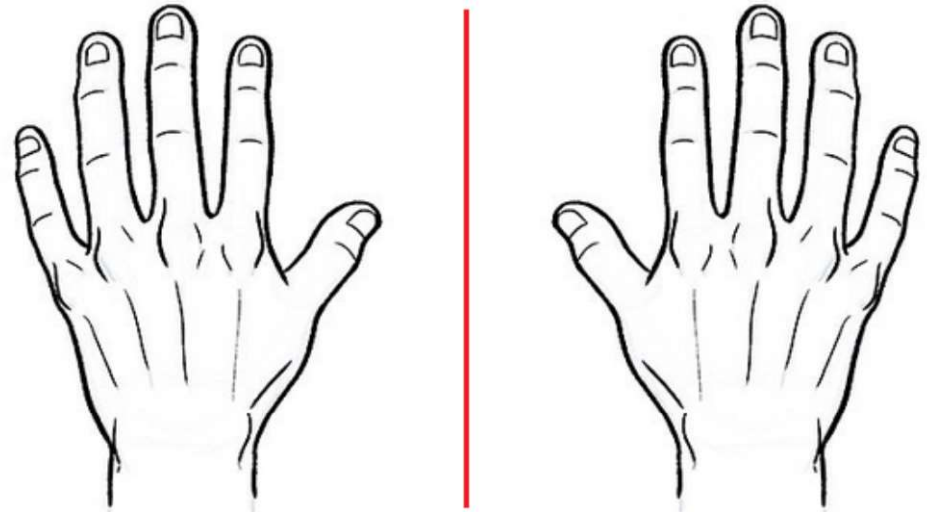
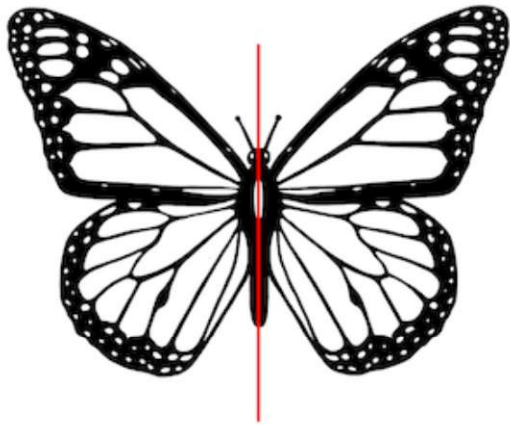
Symmetrioiden matematiikkaa



Mitä tarkoitetaan symmetrialla? Miksi symmetriaa esiintyy luonnossa? Onko symmetrialla monenlaisia muotoja?

Symmetria

Matematiikassa symmetria voi viitata moneen eri asiaan. Tutustutaan nyt erilaisiin symmetrian muotoihin geometriassa.



Peilisymmetria on tunnetuin symmetrian muoto. Se toteutuu jos kuvio ei muutu peilauksessa tietyn akselin ympäri. Puhekielessä “symmetrinen” ja “peilisymmetrinen” ovat usein sama asia.

Symmetria

Toinen tärkeä symmetrian muoto on **kiertosymmetria** (tai **rotaatiosymmetria**).



Kuviossa on **kiertosymmetria**, jos se ei muutu kiertämällä sitä tietyn pisteen ympäri jonkin verran. Yllä olevassa kuvassa esiintyy viisi- ja kuusinkertainen kiertosymmetria.

Symmetria

Matemaatikoita kiinnostaa usein myös niin sanottu **siirtosymmetria**.



Kuviossa on **siirtosymmetria**, jos kuvio pysyy samanlaisena kun sitä siirretään johonkin suuntaan tietyn verran. Ylläolevassa kuviossa esiintyy vaakasuuntainen siirtosymmetria.

Tapettikuviot

Tässä esityksessä keskitymme tietynlaisiin symmetrisiin kuvioihin nimeltä **tapettikuviot**.



Tapettikuviot

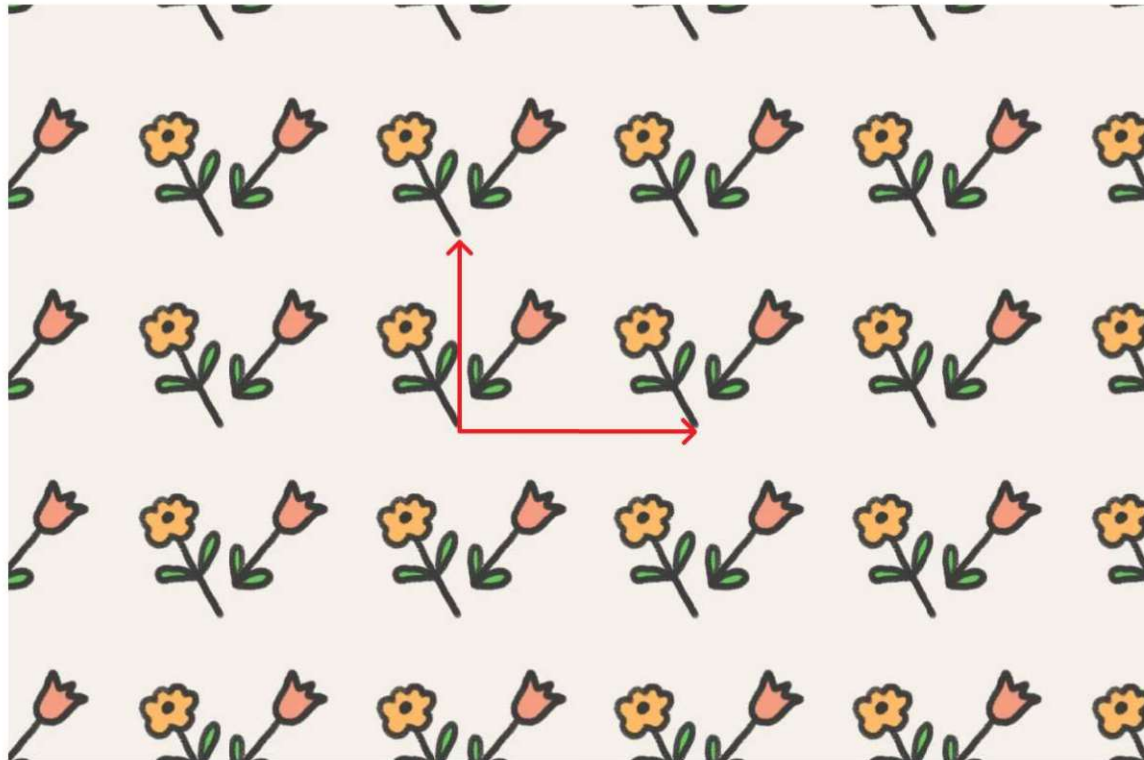
Mitä tapettikuviolla oikeastaan tarkoitetaan? Katsotaan ensin seuraavaa yksinkertaista kuviota:



Kuvitellaan, että kuvio jatkuu samanlaisena sekä vaaka- että pystysuunnassa.

Tapettikuviot

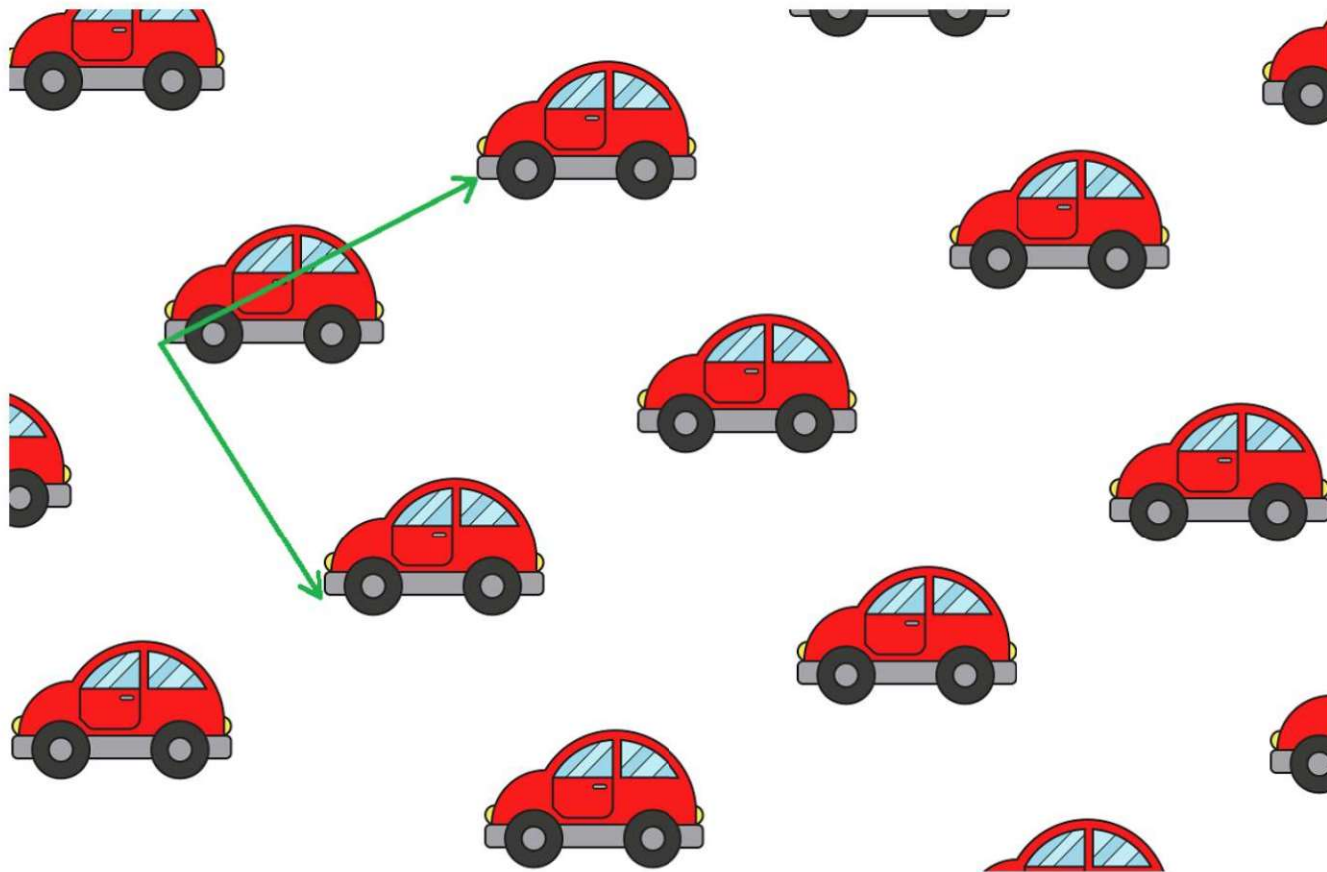
Huomaa, että kuviota voi siirtää kahteen suuntaan ilman että se muuttuu:



Tämä kuvio on siis **siirtosymmetrinen** vaaka- ja pystysuuntaisen siirron suhteen.

Tapettikuviot

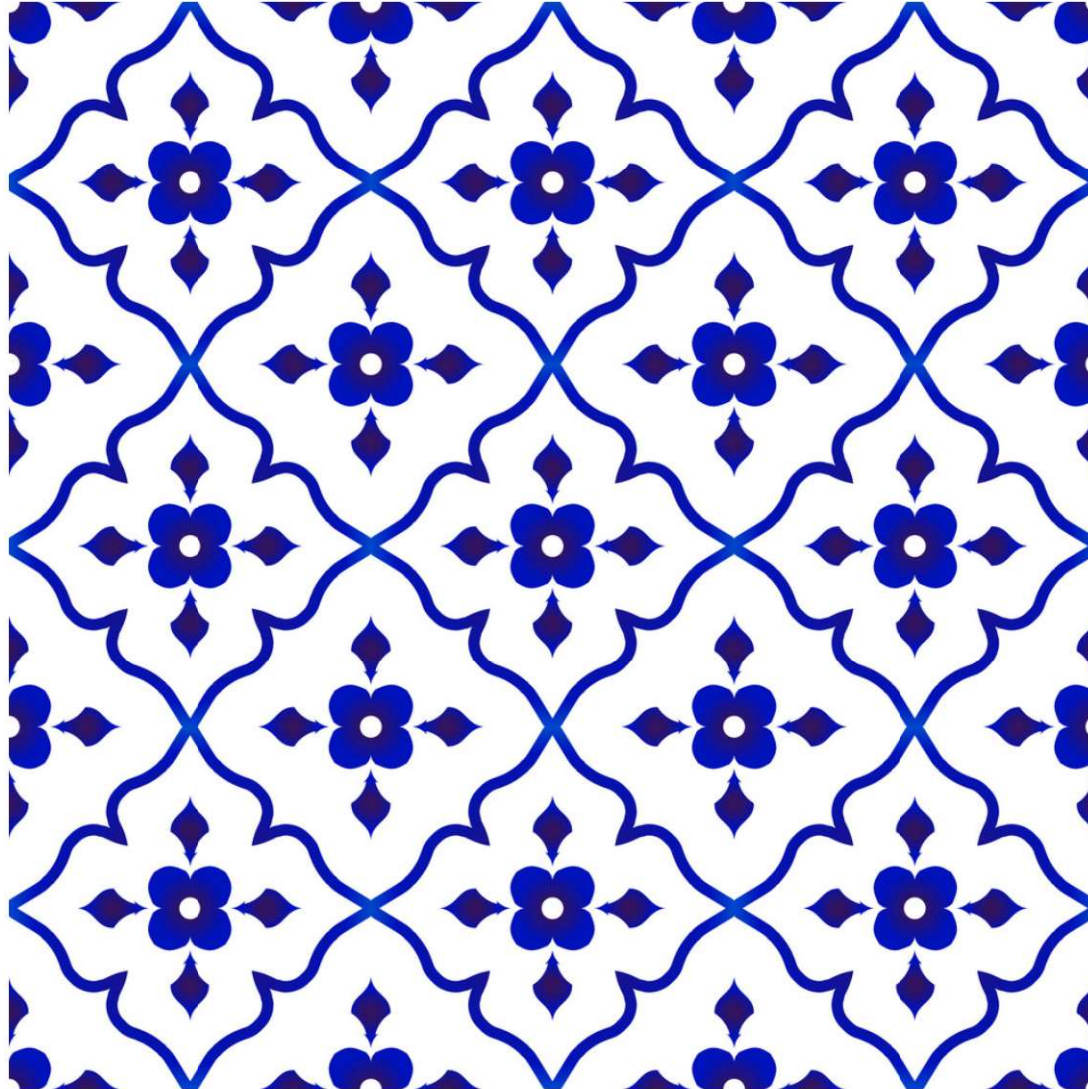
Tapettikuviot ovat kuvioita, joilla on siirtosymmetria kahteen eri suuntaan.



Suuntien ei välttämättä tarvitse olla vaaka- ja pystysuuntaisia.

Tapettikuviot

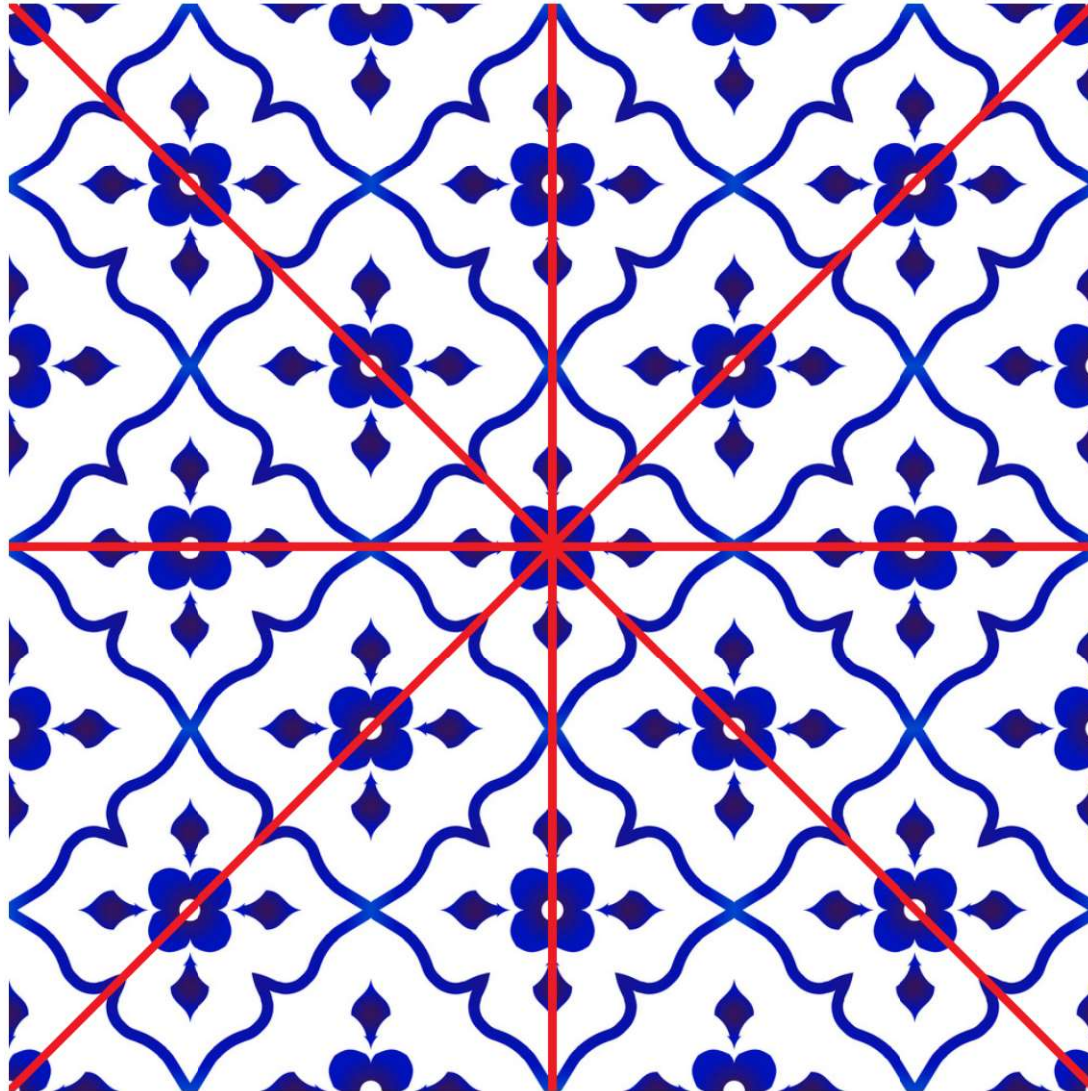
On myös tapettikuvioita joilla on enemmän symmetrioita:



Tämäkin kuvio on symmetrinen kahden siirron suhteen.

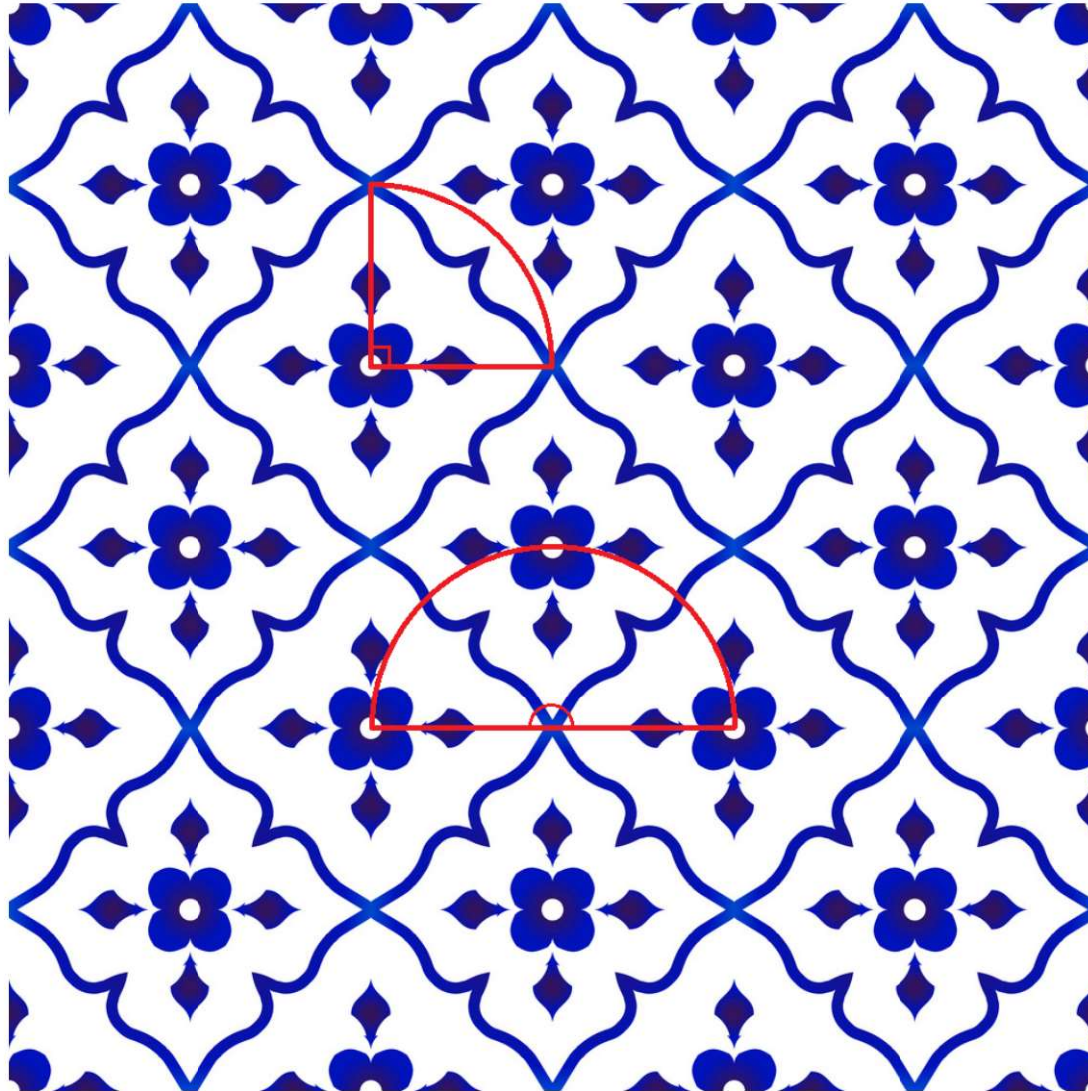
Tapettikuviot

Siitä löytyy myös neljä erisuuntaista peilisymmetriaa:



Tapettikuviot

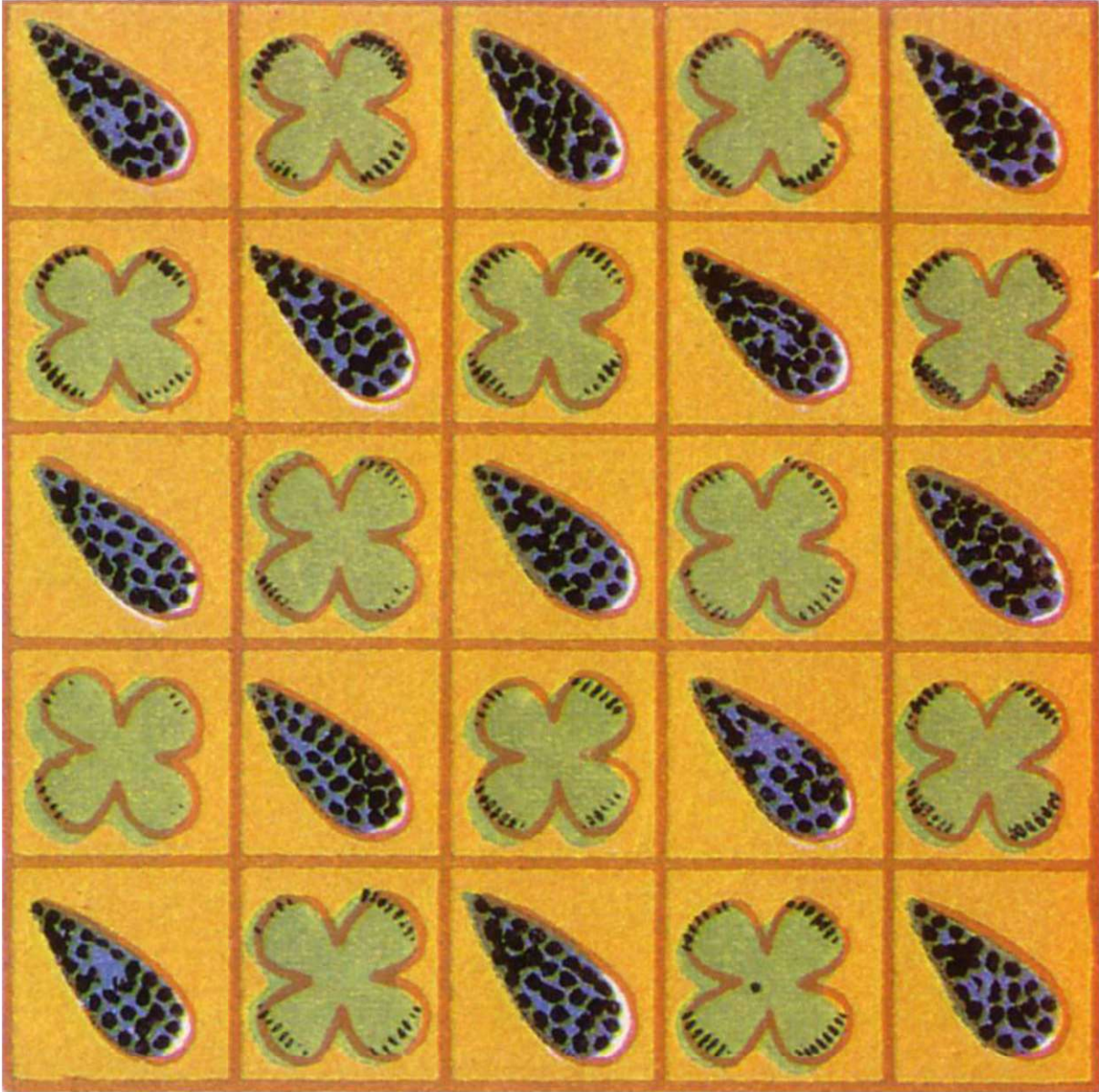
Ja myös nelinkertaista ja kaksinkertaista kiertosymmetriaa:



Eli kuvio ei muutu jos sitä kiertää neljännes- tai puoliympyrän verran tiettyjen pisteiden suhteen.

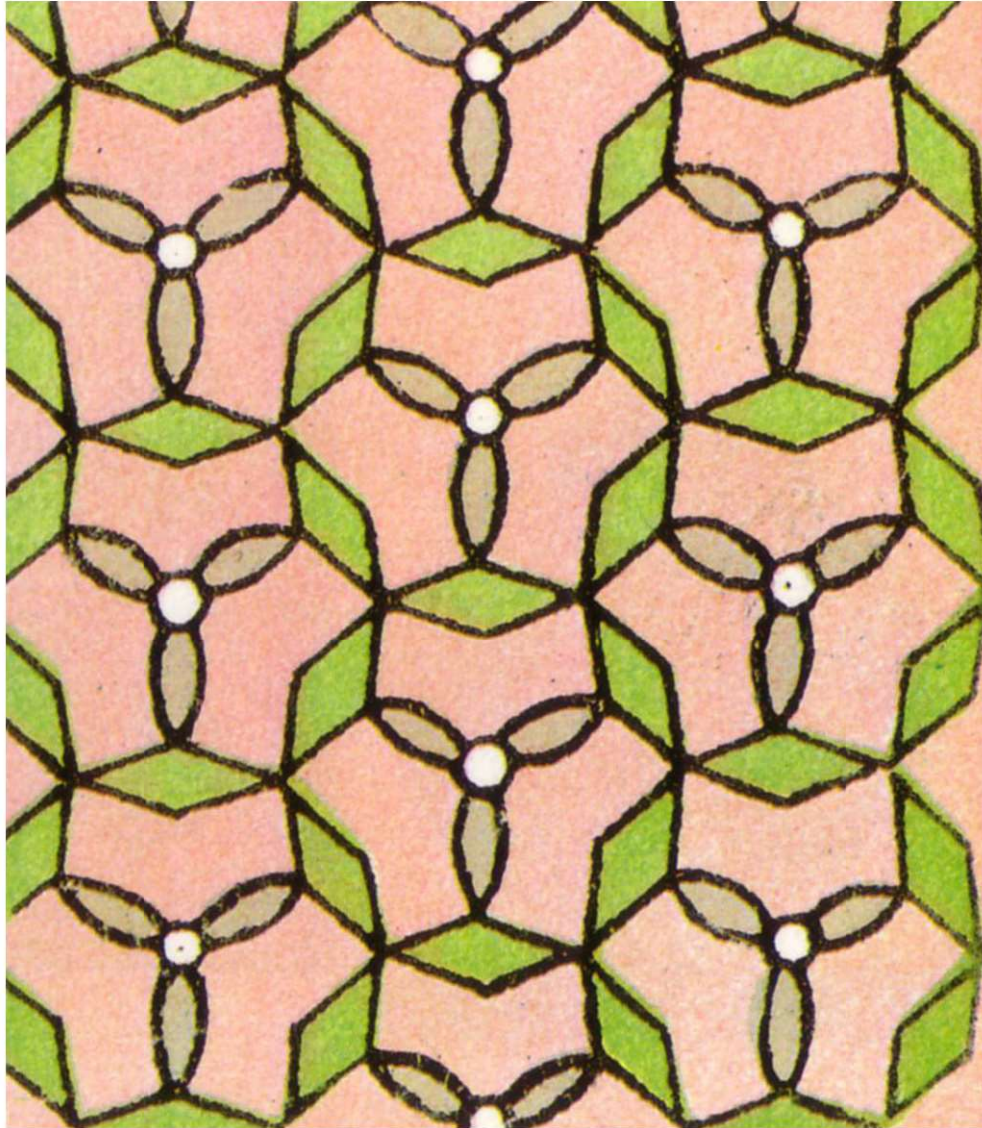
Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



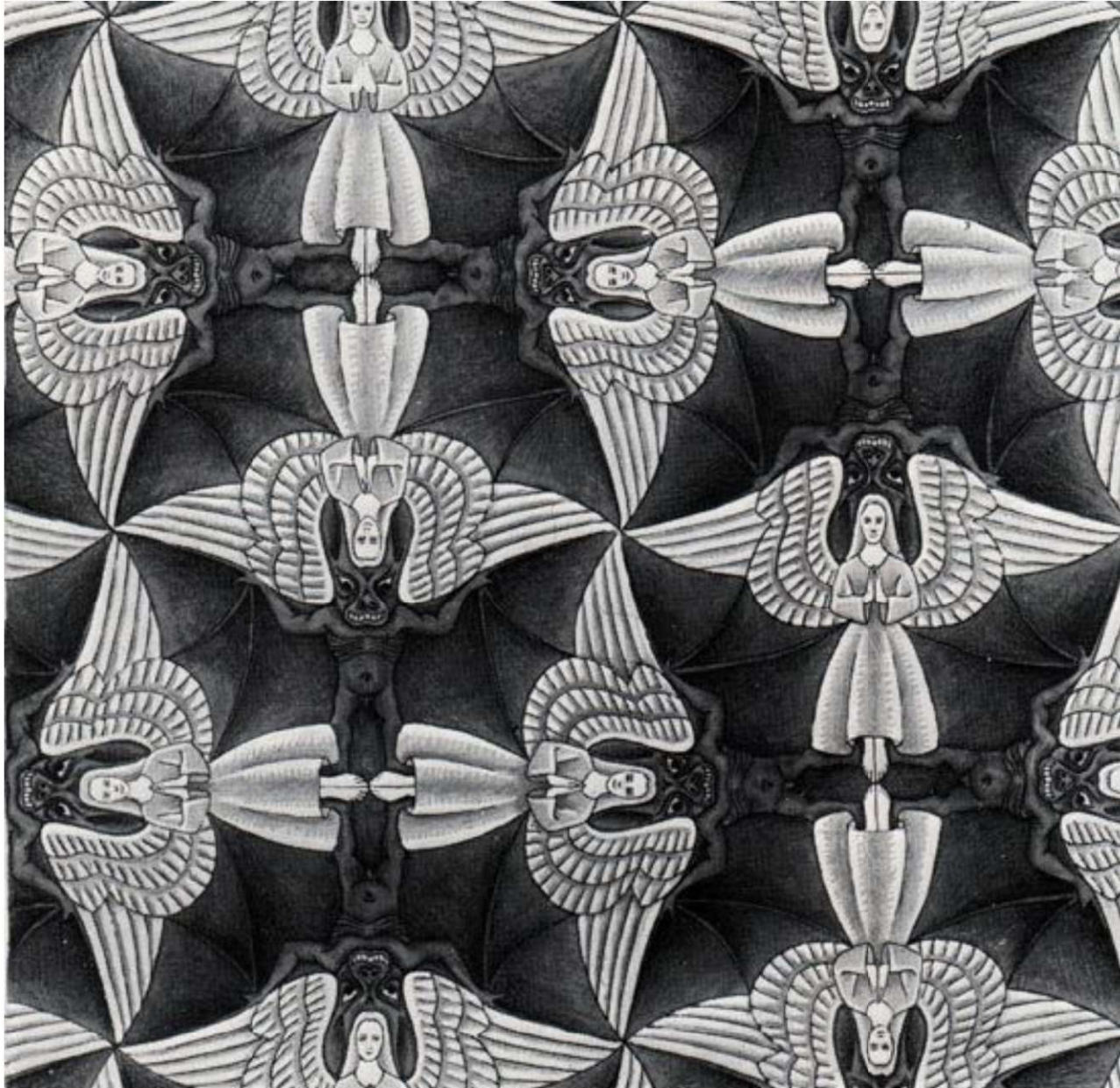
Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



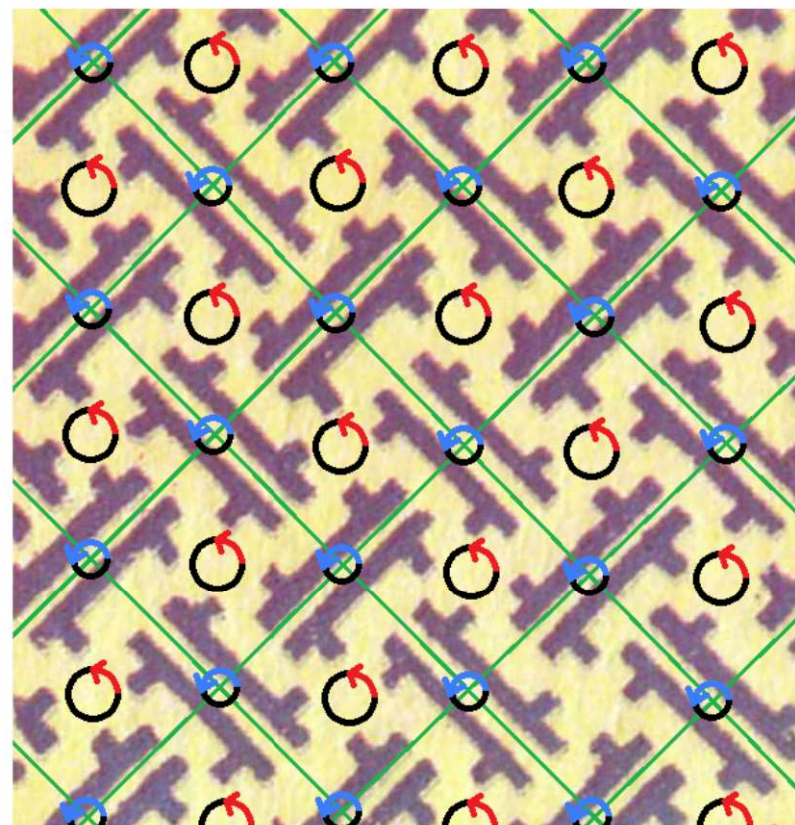
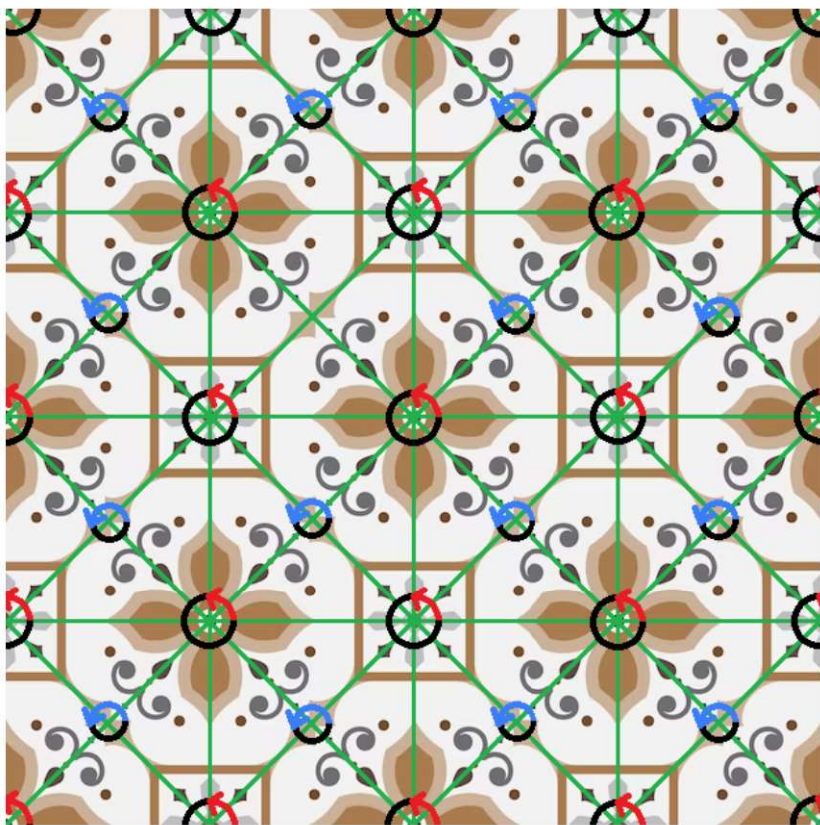
Tapettiryhmät

Kaikki tapettikuviot voidaan luokitella niiden symmetrioiden perusteella.



Tapettiryhmät

Kaikkien kuvion symmetrioiden muodostama joukko on kyseisen kuvion **tapettiryhmä**.

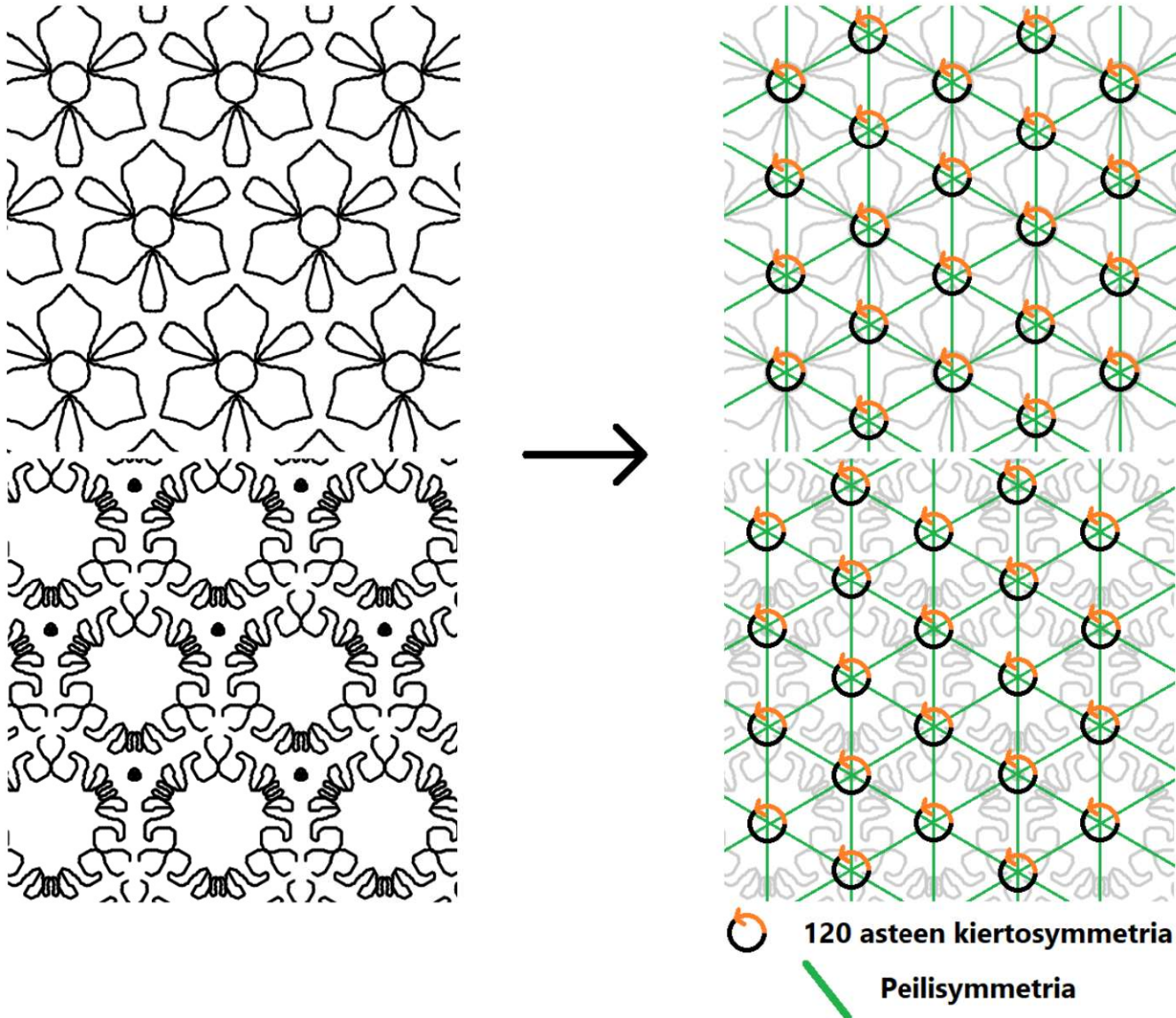


-  90 asteen kiertosymmetria
-  180 asteen kiertosymmetria

 Peilisymmetria

Tapettiryhmät

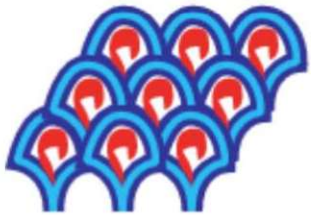
Joskus kahta erilaista kuviota vastaa sama tapettiryhmä.



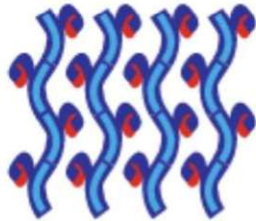
Tapettiryhmät

Osoittautuu, että on vain 17 erilaista tapettiryhmää.

p1



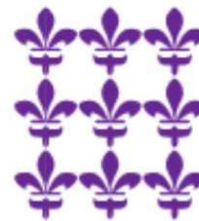
pg



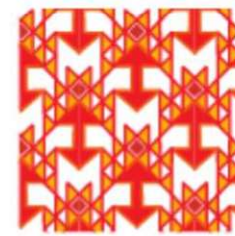
pgg



pm



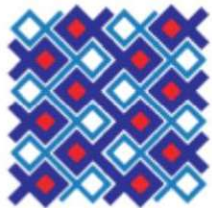
cm



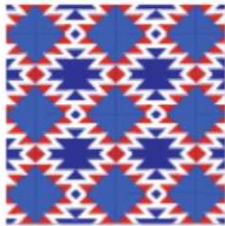
cmm



pmg



pmm



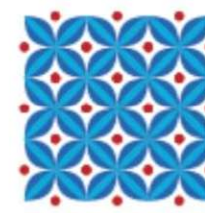
p2



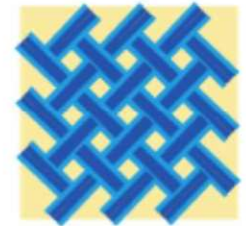
p4



p4m



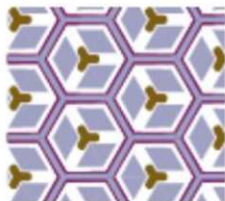
p4g



p3



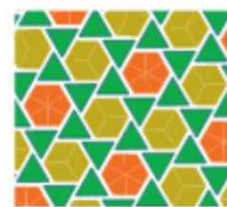
p3m1



p31m



p6

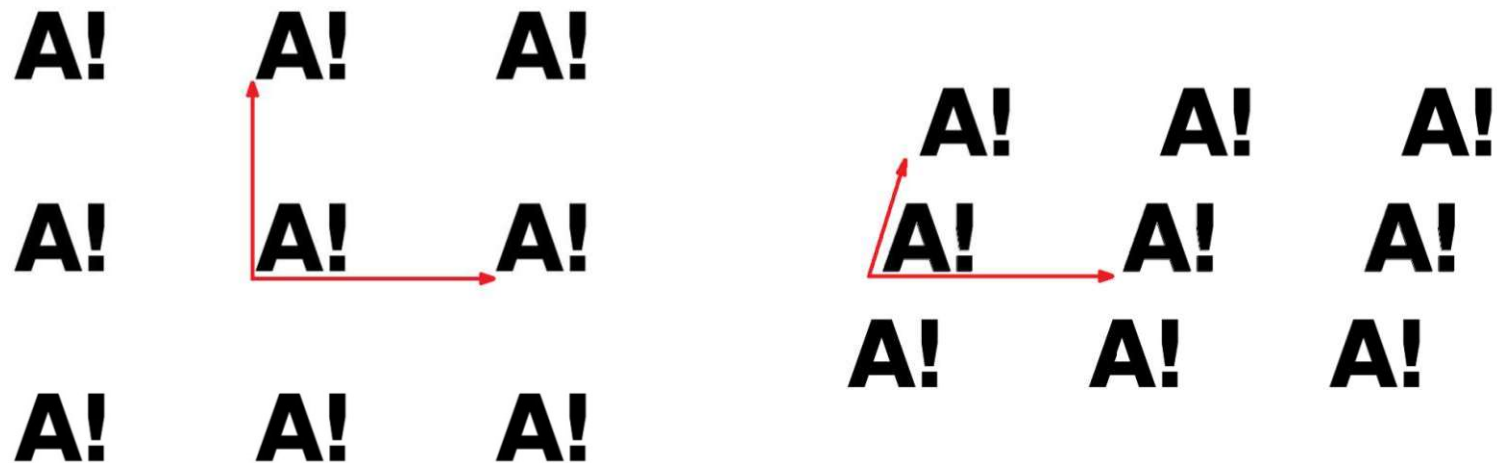


p6m



Sama vai eri?

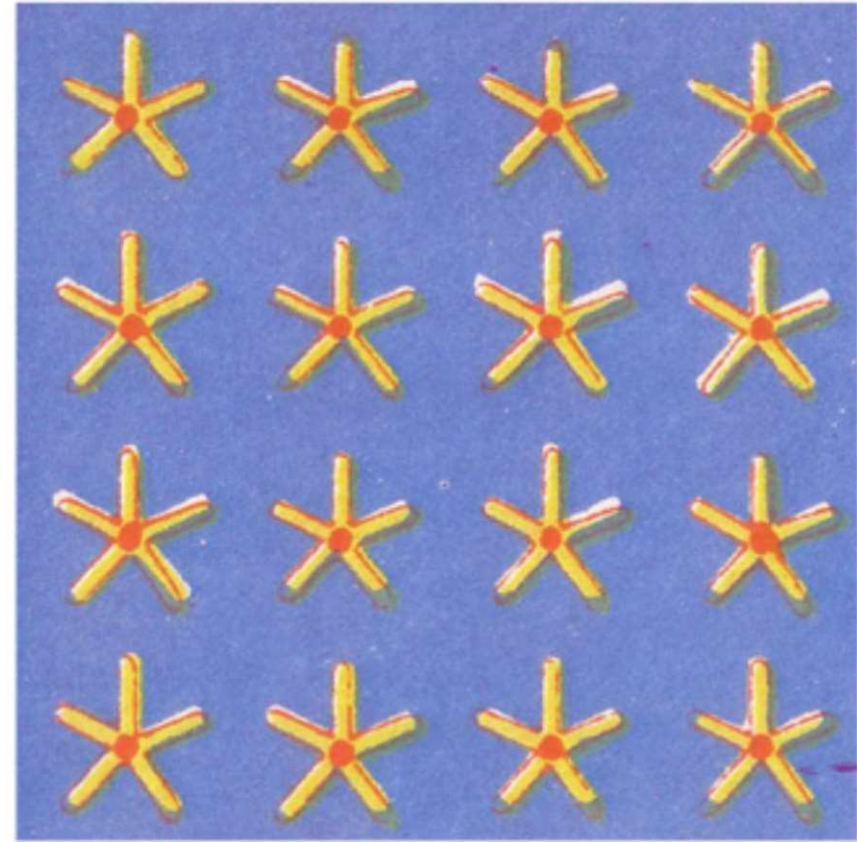
Jos halutaan selvittää kuuluvatko kaksi kuviota samaan tapettiryhmään, pitää selvittää vastaavatko molempien kuvioiden symmetriat toisiaan.



Näiden kahden kuvion siirtosymmetrioilla on eri suunnat ja suuruudet, mutta tämä vielä sallitaan. Molemmat kuviot kuuluvat samaan tapettiryhmään $p1$ koska niissä ei ole muita symmetrioita.

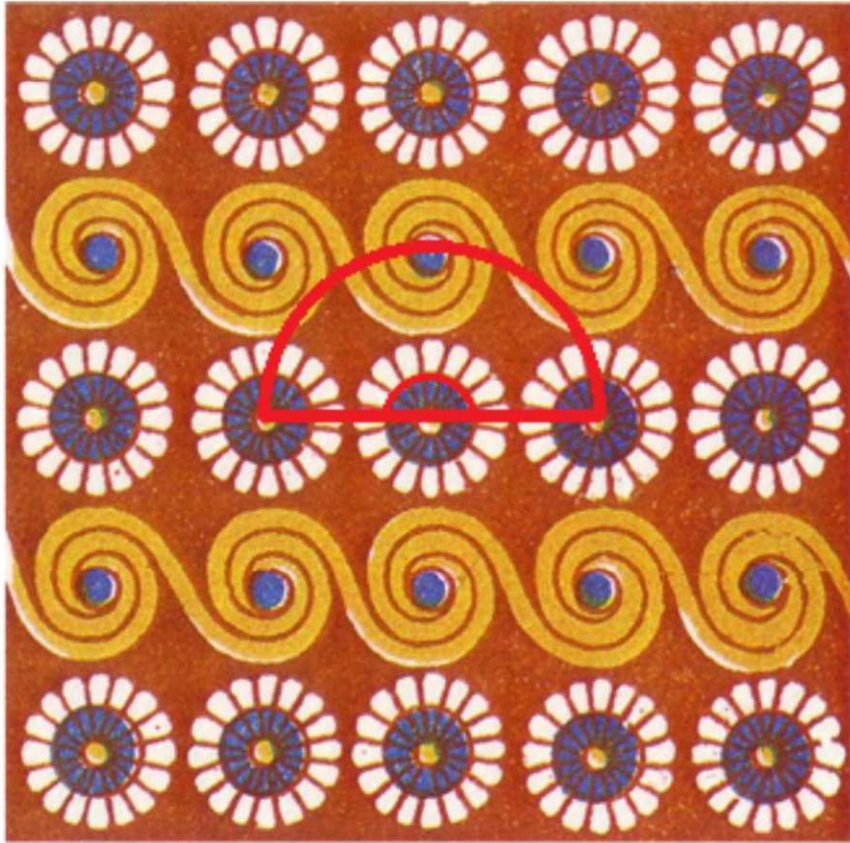
Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?

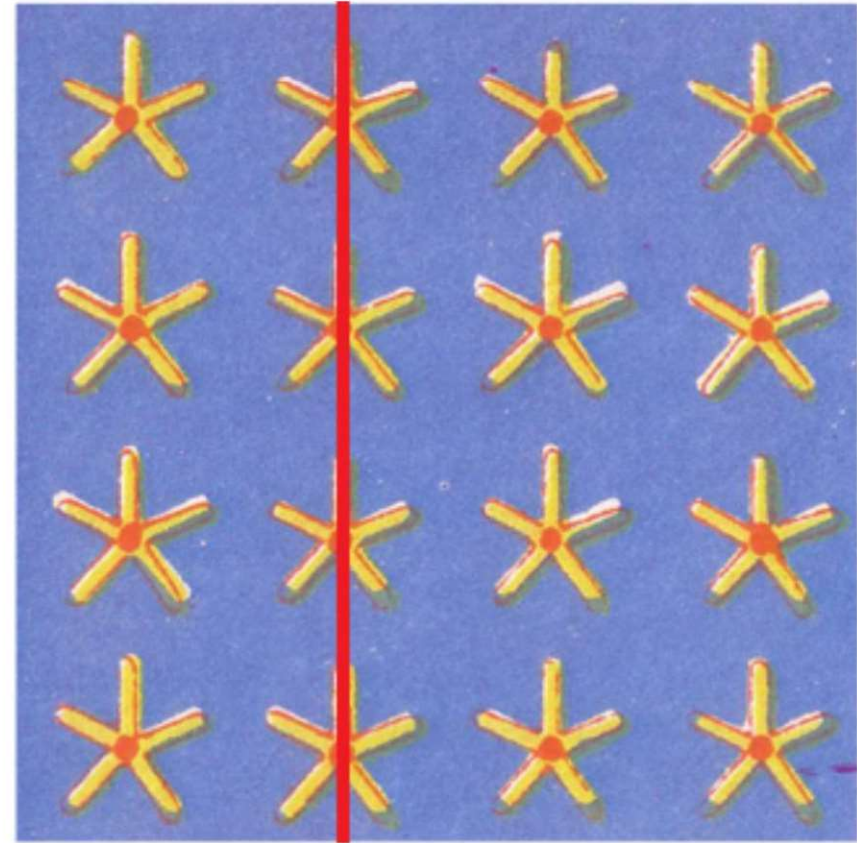


Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



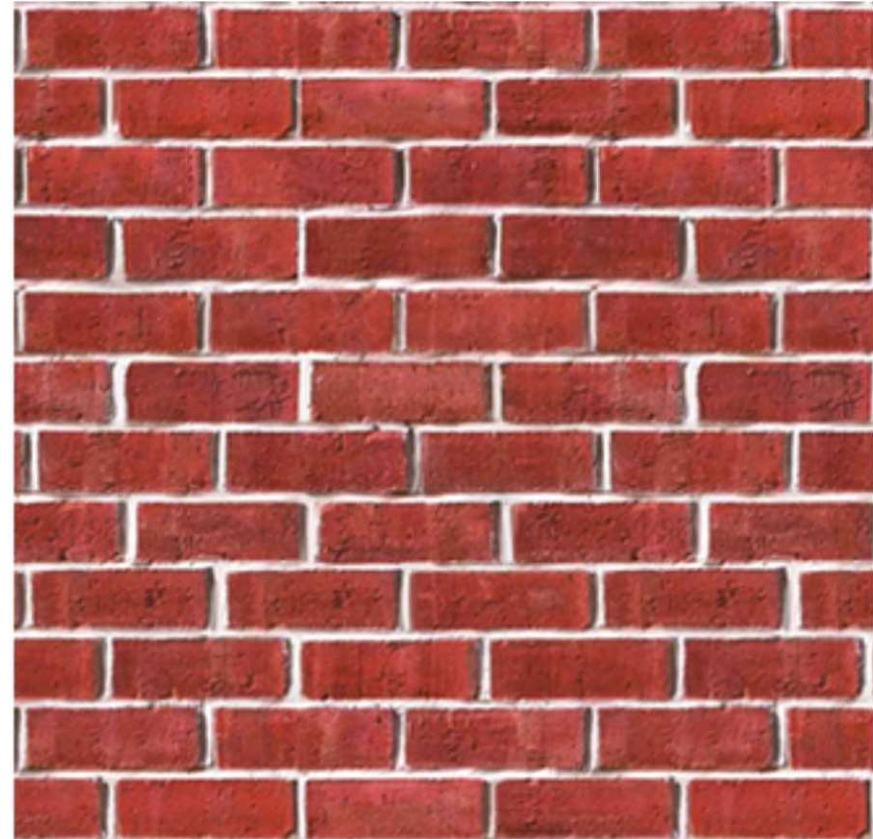
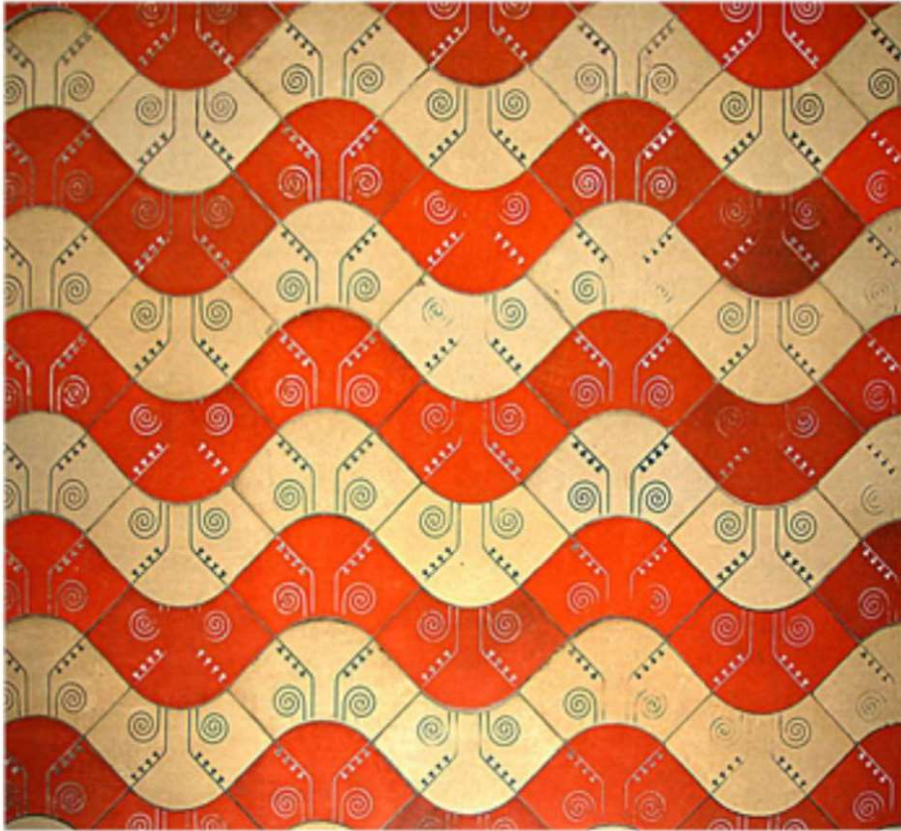
180 asteen kiertosymmetria
(Ryhmä: p2)



Peilisyymmetria
(Ryhmä: pm)

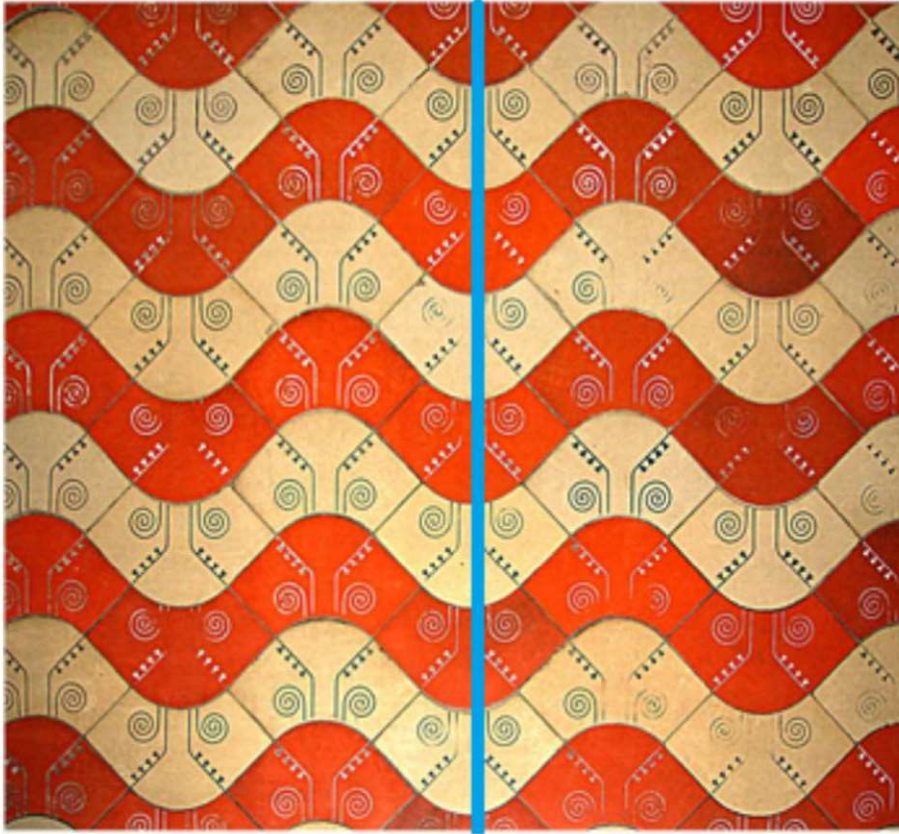
Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?

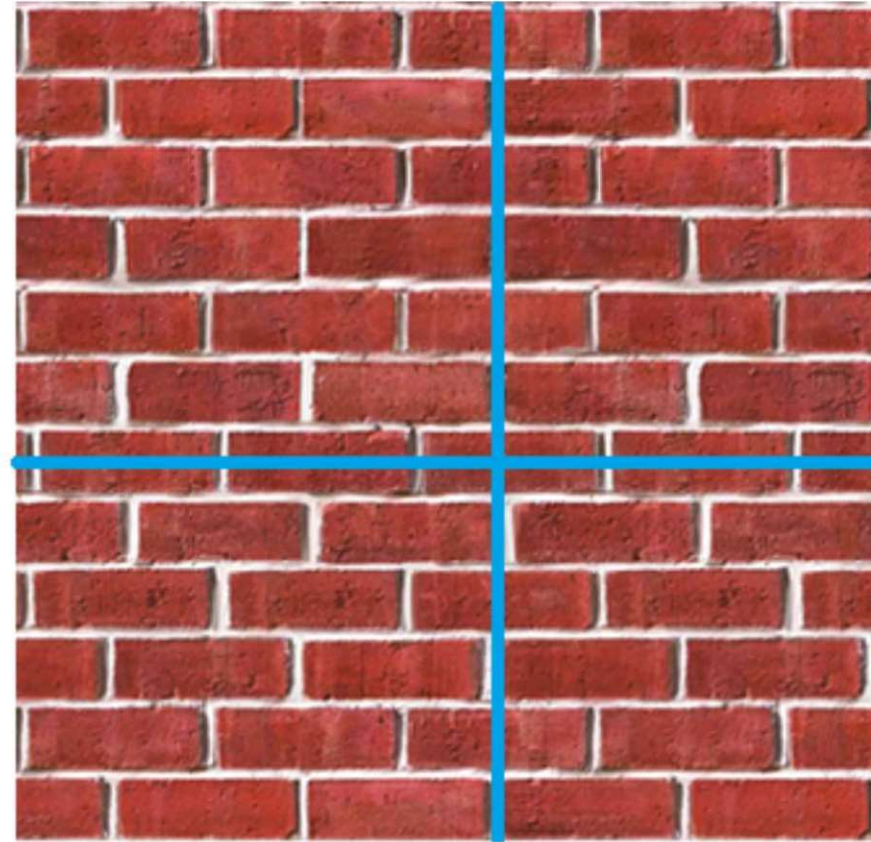


Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



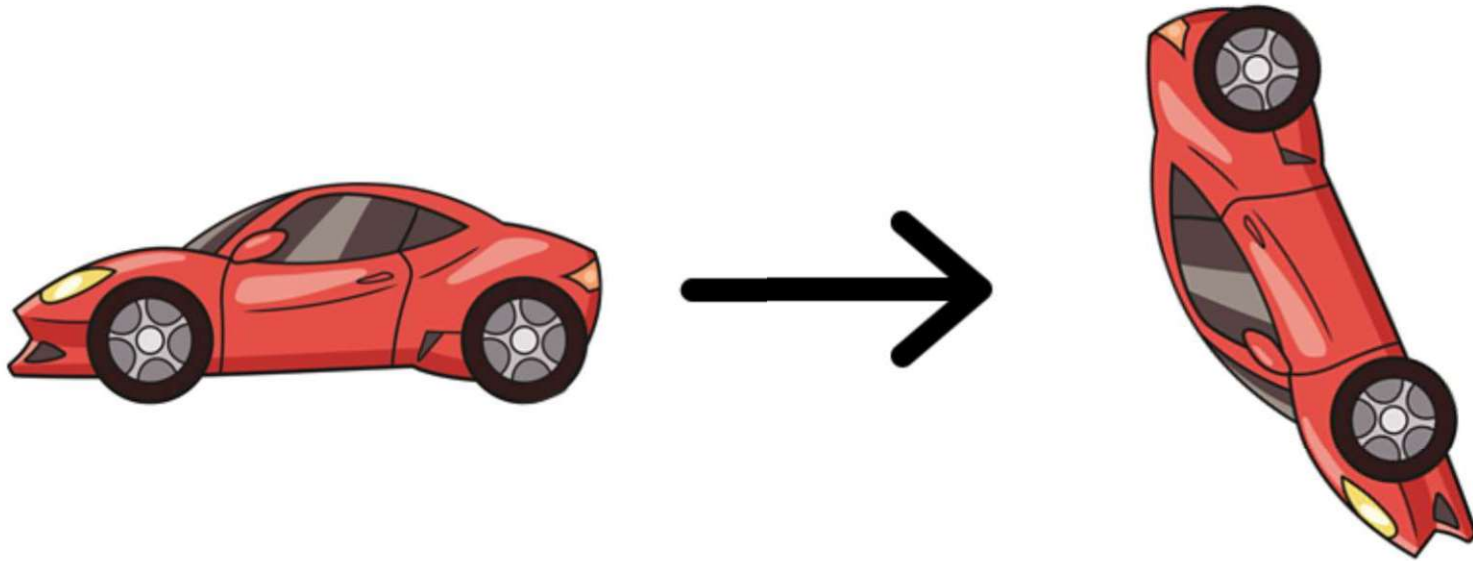
Peilisyymetria yhteen suuntaan
(Ryhmä: pmg)



Kaksisuuntainen peilisyymetria
(Ryhmä: cmm)

Isometriat

Tutkitaan nyt vähän tarkemmin mitä mahdollisia symmetrioita kuvioilla voi olla.



Sanotaan, että tason kuvaus $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on **isometria** jos se pitää pisteiden väliset etäisyydet (ja kulmat) ennallaan.

Isometriat

Tason isometrioihin kuuluu:

Siirto



Kierto



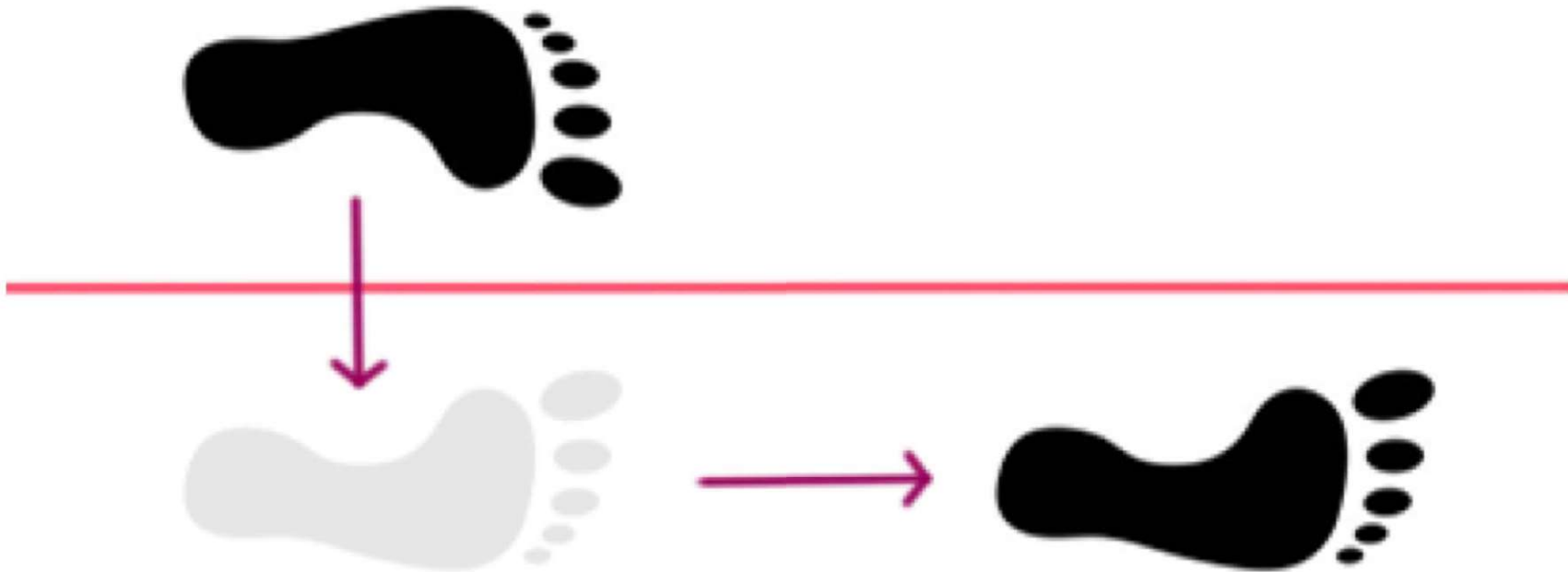
Peilaus



Itse asiassa kaikki tason isometriat voidaan esittää näiden kolmen perusisometrian yhdistelminä.

Isometriat

On hyvä erotella myös eräs tason isometria nimeltä **liukupeilaus**:



Liukupeilauksessa ensin peilataan suoran suhteen, sitten tehdään siirto saman suoran suuntaisesti.

Isometriat

Tason isometrioille saadaan nyt yksinkertainen luokittelu.

Lause. Jokainen tason isometria on joko:

- ▶ **Siirto** (sopivan suunnan ja etäisyyden suhteen)
- ▶ **Kierto** (sopivan keskipisteen ja kulman suhteen)
- ▶ **Liukupeilaus** (sopivan suoran ja etäisyyden suhteen)

Siis myös jokainen tapettikuvioissa esiintyvä symmetria tulee jostain näistä kolmesta vaihtoehdosta.

Huom! Liukupeilaus voi olla myös tavallinen peilaus.

Tapettikuvioiden luokittelu

Jokaisen tapettikuvion tarkan luokituksen voi määrittää seuraamalla oheista vuokaaviota.

